




ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO AVANZADO DE SEÑALES

Clase 7

Dra. María Eugenia Torres
Dr. Hugo Leonardo Rufiner
Dr. Diego H. Milone



Universidad Nacional de Entre Ríos
Facultad de Ingeniería
Laboratorio de Señales y
Dinámicas no Lineales

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ciencias Hídricas
SINC(i)

1
29/05/2009
APAS'2009

Contenidos

- **Introducción**
Elementos de Matemáticas avanzadas. Operadores lineales. Proyecciones. Espacios vectoriales. Filtros lineales invariantes en el tiempo. Integrales de Fourier en L1 y en L2. Propiedades. Filtros lineales discretos invariantes en el tiempo. Señales finitas.
- **Análisis tiempo-frecuencia**
La transformada Fourier por ventanas. La transformada ondita. Frecuencia instantánea. Energía tiempo-frecuencia instantánea.
- **Marcos**
Teoría de Marcos. Marcos en Fourier y en onditas. Invariancia ante traslación. Transformada Ondita Diádica.
- **Bases Ondita.**
Bases ondita ortogonales. Aproximaciones multiresolución. Funciones escala. Filtros espejo conjugados. Clases de bases ondita. Onditas y bancos de filtros. Bases biortogonales.

2
29/05/2009
APAS'2009

Comentario

Capítulo VI: Wavelet zoom – singularidades, fractales, multifractales



Aplicaciones

29/05/2009

APAS'2009

3

Marcos Ondita (repass)

Los marcos ondita son construidos por muestreo de los parámetros tiempo y escala de la CWT.

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt$$

$$\psi_{u,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) \quad \|\psi\| = 1 \Rightarrow \|\psi_{u,s}\| = 1$$

$s = a^j$, paso de dilatación $a > 1$ suficientemente pequeño

$$u = n u_0 a^j$$

$$\psi_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi \left(\frac{t - n u_0 a^j}{a^j} \right)$$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

4 4

Marcos Ondita: Tiempo ~~frecuencia~~ escala(repaso)

$$\psi_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{t-n u_0 a^j}{a^j}\right)$$

Marco ondita

$$\langle f, \psi_{j,n} \rangle = f * \bar{\psi}_{a^j}(n u_0 a^j) = Wf(n u_0 a^j, a^j)$$

$$\langle f_\tau, \psi_{j,n} \rangle = f * \bar{\psi}_{a^j}(n u_0 a^j - \tau) = Wf(n u_0 a^j - \tau, a^j)$$

Los coeficientes **no** son invariantes por traslaciones

22/05/2009
APAS'2005 - Clase 6
5

Transformada ondita Diádica (Cuasicontinua)

$$\Psi_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi\left(\frac{t-n}{2^j}\right)$$

Marco ondita

Existen infinitas onditas duales para la reconstrucción

La descomposición es invariante por traslaciones

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^j} Wf(\cdot, 2^j) * \tilde{\psi}_{2^j}(t).$$

22/05/2009
APAS'2005 - Clase 6
6

BASES ONDITA

29/05/2009

APAS'2009

7

Bases Ondita

Construcción de onditas, por dilataciones y traslación de una familia

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

que sea una **base ortonormal** de $L^2(\mathbb{R})$.

Procesamiento de Señales \Leftrightarrow Análisis Armónico.

29/05/2009

APAS'2009

8

Análisis multiresolución (antecedentes)

Análisis microlocal (1950)

- **Orígenes:** Matemática (análisis armónico)
- Basado en la transformada de Fourier,
- Relacionado con EDDP No lineales a coeficientes linealmente variables

Representaciones piramidales (1981)

- **Orígenes:** visión computacional, procesamiento de imágenes y procesam. de señales.

(Peter J. Burt, Edward H. Adelson y James Crowley, 1981-83)

- Señal o imagen es sometida a repetidos suavizados y submuestreos.
- Originalmente fue una representación escala-espacio.

29/05/2009

APAS'2009

9

Análisis multirresolución (MRA) o aproximación multiescala (MSA)

1986: Stephane Mallat y Yves Meyer

- Un método de diseño práctico de discrete wavelet transforms (DWT).
 - Justificación del algoritmo de fast wavelet transform (FWT).

• Lemarie y Meyer, Ondelettes et bases Hilbertiennes , 1986

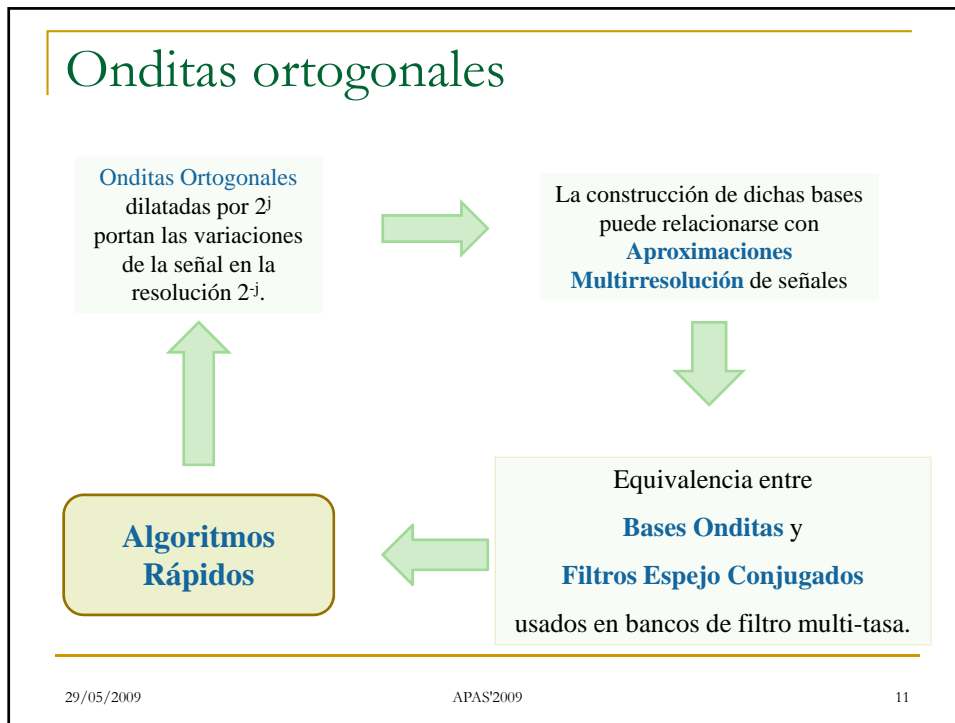
• S. G. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: A Wavelet Representation," IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intel., Vol 11, No. 7, July 1989.

•Stephane G Mallat, Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal, Bases of L (R). Trans. am. math. soc , 1989.

29/05/2009

APAS'2009

10



Hacia donde vamos?

- Con onditas ortogonales:

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j-1} \Rightarrow V_{j-1} = V_j \oplus W_j$$

$$P_{V_{j-1}} f = P_{V_j} f + P_{W_j} f$$

$\{0\} \subset \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$

Nivel 0

Diferente notación según autores!!!!

29/05/2009
APAS'2009
12

Bases Ondita Ortogonales

$$f(t) \in L^2(\mathcal{R})$$

la suma parcial con coeficientes ondita

$$\sum_n \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}(t) \quad \psi_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-n}{2^j}\right)$$

puede interpretarse como
la diferencia entre dos aproximaciones de f
en las resoluciones 2^{-j+1} y 2^{-j} .

Las Aproximaciones Multirresolución

calculan las aproximaciones de f en diferentes resoluciones
con **proyecciones ortogonales** en diferentes espacios

$$\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}} ; V_j \subset L^2(\mathcal{R})$$

El parámetro de **escala** 2^j es la **inversa** de la
resolución 2^{-j} !!!!!

29/05/2009

APAS'2009

13

Aproximación Multirresolución

Definición: (Mallat, 1989; Meyer, 1992)



Una sucesión $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios cerrados de $L^2(\mathcal{R})$ es una **aproximación multirresolución** si satisfacen las siguientes propiedades:

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j \quad (1)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j \quad (2)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}, \quad (3)$$



$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad (4)$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ es denso en } L^2(\mathcal{R}) \text{ i.e. } \lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = L^2(\mathcal{R}) \quad (5)$$

$$\exists \theta / \{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ es una base de Riesz de } V_0. \quad (6)$$

29/05/2009

APAS'2009

14

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$$


(MRA1) V_j es **invariante por traslaciones temporales** proporcionales a la escala 2^j .
 V_j será asimilado a una grilla uniforme a intervalos $2^j \Rightarrow$ caracteriza la aprox. a resolución 2^j .

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$$


(MRA 2) Condición de Causalidad: Una aproximación en el nivel de resolución 2^j tiene toda la información necesaria para calcular la aproximación en el nivel 2^{j-1} .

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1},$$

(MRA 3) dilatación de funciones de V_j define aproximaciones en un nivel de resolución mas **tosco** 2^{j-1}



29/05/2009



15

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\},$$

(MRA 4) Cuando la resolución $2^j \rightarrow 0$, se pierden detalles de f y

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_{V_j} f\| = 0$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ es denso en } L^2(\mathbb{R}) \text{ i.e. } \lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$$

(MRA 5) Cuando la resolución $2^j \rightarrow +\infty$, las aproximaciones se aproximan a la señal original f

y

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|f - P_{V_j} f\| = 0$$

$\exists \theta / \{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_0 .

(MRA 6) posibilidad de una discretización.
 θ se interpreta como una célula de resolución unitaria.

29/05/2009

APAS'2009

16

Teorema

Una familia $\{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz del espacio V_0 que genera si y sólo si existen $A > 0$ y $B > 0$, tales que

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi], \quad \frac{1}{B} \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\theta}(\omega - 2k\pi)|^2 \leq \frac{1}{A}.$$

$\forall f \in V_0$, existe única descomposición

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \theta(t-n)$$

con

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a[n]|^2 \leq B \|f\|^2$$

Estabilidad Numérica

+ (MRA3)
 $\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(\frac{t}{2}) \in V_{j+1}$

$\{2^{-j/2} \theta(2^{-j} t - n)\}$ es base de Riesz de V_j con las mismas cotas de Riesz A y B en todas las escalas 2^j .

29/05/2009

APAS'2009

17

Ejemplo 1

Aproximaciones con funciones características (seccionalmente constantes)

$$V_j = \{g \in L^2(\mathbb{R}) : g(t) = cte \text{ si } t \in [n2^j, (n+1)2^j), n \in \mathbb{Z}\}$$

$$f \in L^2(\mathbb{R})$$

¿Cómo se la aproxima en V_j ?

¿Cuál es su resolución en la escala j ?

¿Cuál es su aproximación en resolución 2^j ?

$$\theta(t) = \chi_{[0,1)}(t) \quad \text{Provee una base de Riesz de } V_0$$

$$V_j \subset V_{j-1}$$

Y constituyen una aproximación multiresolución

Ejemplo 2

Aproximaciones Shannon

$f \in L^2(\mathfrak{R})$, con ancho de banda de frecuencia finita

$$V_j = \{g \in L^2(\mathfrak{R}) : \text{supp}(\hat{g}) \subset [-2^{-j}\pi, 2^{-j}\pi]\}$$

En V_0 $\theta(t) \quad / \quad \hat{\theta}(\omega) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega)$

$$\theta(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Provee una base ortogonal de V_0

$$\{\theta(t - n)\}$$

$$\theta(t/T) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \Rightarrow$$

Provee una base ortogonal de V_j para $T=2^j$

$$\left\{ \theta\left(\frac{t-n}{2^j}\right) \right\}$$

$$V_j \subset V_{j-1}$$

Y así con las demás propiedades MRA

Funciones de Escala (Scaling)

La aproximación de f en el nivel de resolución 2^j está definida por la proyección ortogonal $P_{V_j} f$ en V_j .

¿Cómo calcular dicha proyección?

- 1) ortogonalizar la base de Riesz
- 2) encontrar una base ortonormal de V_j por dilatación y traslación de una **función de escala** (scaling function) ϕ .

P_{V_j} dará la aproximación en la escala 2^j .

Teorema

Sea $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ una aproximación multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$ y ϕ la **función de escala** cuya transformada de Fourier es

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2\right)^{1/2}}$$

Indiquemos

$$\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-n}{2^j}\right)$$

La familia $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_j para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Ver demostración Teor. 7.1 en pag. 225: completar detalles

29/05/2009

APAS'2009

21

Aproximación por Escalas

$$P_{V_j} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n}$$

Aproximación en base ortonormal por escalas

$$a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle$$

Coefficientes escala

$$a_j[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right) dt = f * \bar{\phi}_j(2^j n)$$

$$\bar{\phi}_j(t) = \sqrt{2^{-j}} \phi(2^{-j} t)$$

La energía de $\hat{\phi}(\omega)$ está concentrada en $[-\pi, \pi]$

$$F[\bar{\phi}(\omega)] = F[\sqrt{2^{-j}} \phi(2^{-j} t)] \quad \text{Estará concentrada en } [-\pi 2^j, \pi 2^j]$$

$a_j[n]$ son un filtrado pasabajo de f , muestreado a intervalos 2^j

29/05/2009

APAS'2009

22

Ejemplo: Aproximaciones spline

- Aproximaciones por polinomios spline: aproximaciones suaves con decaimiento rápido

$$m \geq 0, \quad V_j :$$

Espacio de las splines de orden m

= { Funciones continuas $m-1$ veces diferenciables con continuidad e iguales a polinomios de grado m en cualquier intervalo $[n 2^j, (n+1)2^j]$ }

Una base de Riesz de polinomios spline se construye con las *box splines*

$$\beta_0(t) = \chi_{[0,1]}(t)$$

$$\theta(t) = \beta_m(t) = \beta_0^{m+1}(t)$$

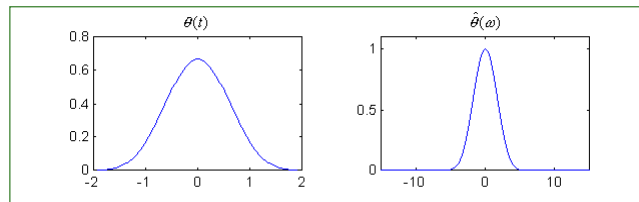
centrada en $t = \begin{cases} 1/2 & \text{si } m \text{ es par} \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^{m+1} \exp\left(\frac{-i\varepsilon\omega}{2}\right), \quad \text{con } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par} \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo: Spline Cúbica

$$\theta(t) = \beta^3(t) = \begin{cases} 1 - |t| + (1/6)|t|^3 - (1/3)(1 - |t|)^3 & \text{si } |t| \leq 1 \\ (2 - |t|)^3 / 6 & \text{si } 1 \leq |t| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |t| > 2 \end{cases}$$

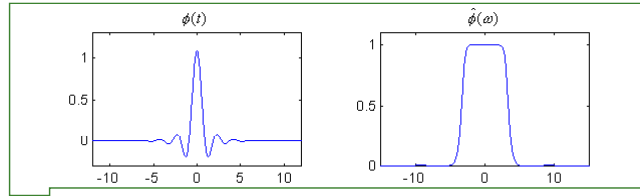
$$\hat{\theta}(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^4$$



$\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una Base de Riesz de \mathbf{V}_0

(Ejercicio)

Función de escala Spline Cúbica



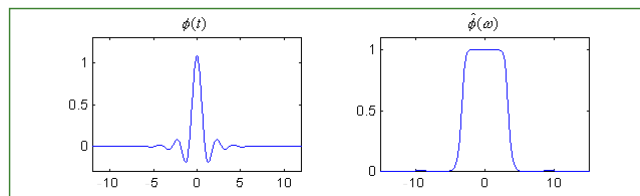
Función de escala Spline Cúbica y su transformada de Fourier

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\exp(-i\varepsilon\omega/2)}{\omega^{m+1} \sqrt{S_{2m+2}(\omega)}}, \quad \text{con}$$

$$S_n(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega + 2k\pi)^n}, \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par.} \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

se calcula con la derivada
29/05/2009 2m de

$$S_2(2\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\omega + 2k\pi)^2} = \frac{1}{4 \sin^2 \omega}$$

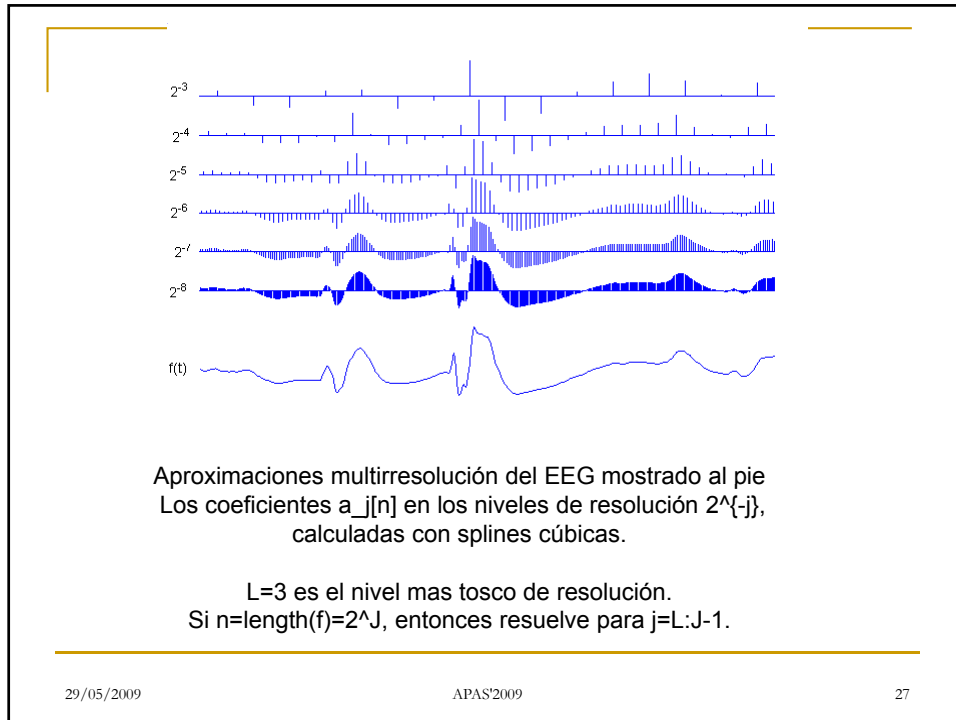


- La energía de $\hat{\phi}(\omega)$ está concentrada en $[-\pi, \pi]$.
- $\sqrt{2^j} \hat{\phi}^*(2^j \omega)$ no es despreciable en $[-2^j \pi, 2^j \pi]$.

⇓

Las aproximaciones discretas $a_j[n]$ es un filtrado pasa-bajo de f muestreado en intervalos 2^j .

- $\phi(t)$ tiene soporte infinito pero decae rápidamente a 0.



```
(WaveLab802)
%CAPTION
fprintf('\n');
disp('Figura 7.3')
disp('La señal original esta al pie')
disp('Las señales discretas siguientes son la
aproximaciones multirresolución')
disp('a_j[n] en las escalas 2^j, (niveles de resolución
2^{-j}).')
disp('calculadas con splines cúbicas.')
```

```
L=3;
qmf = MakeONFilter('Daubechies',6);
wc = FWT_PO(f,L,qmf);
figure(1);
axes('position',h1);
plot(f);
text(-25,-1,'f(t)');
axis([0 length(f) min(f) max(f)]);
axis off
```

```
%-----
L = 3;
qmf = MakeONFilter('Daubechies',6);
wc = FWT_PO(f,L,qmf);
figure(1);
axes('position',h2);
wcoef = ShapeAsRow(wc);
[n,J] = dyadlength(wcoef);
t = (.5:(n-.5));
LockAxes([0 n 0 (J-L+1)]);
scale = .9;
w = wcoef(1:2^L);
for j = L:J-1,
    tj = n.*(5:(2^(j+1)-5))./2^(j+1);
    w = UpDyadLo(w,qmf) +
        UpDyadHi(wcoef(dyad(j)),qmf);
    maxw = max(w);
    newPlotSpikes(J-j,tj, scale.*(w/maxw),n);
    text(-25,-j+J-1/5,sprintf('2^%d',-j));
end
axis off
```

29/05/2009 APAS'2009 28

Filtros espejo conjugados

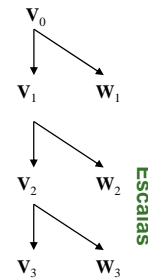
La aproximación Multirresolución queda caracterizada por la función de escala Φ

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j-1} \Rightarrow V_{j-1} = V_j \oplus W_j$$

$$P_{V_{j-1}} f = P_{V_j} f + P_{W_j} f$$

Veremos que:

- Φ genera una base ortogonal en cada espacio V_j
- las propiedades de Φ garantizan que los espacios son un MRA
- cada función de escala queda determinada por un filtro (filtro espejo conjugado)



Filtros Espejo Conjugados

Ecuaciones de escalas

(MRA 2) $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$ ← Propiedad de causalidad

$$j=0, V_1 \subset V_0 \Rightarrow 2^{-1/2} \phi(t/2) \in V_1 \subset V_0$$

$$V_0 = \text{gen}\{\phi(t-n), n \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow 2^{-1/2} \phi(t/2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \phi(t-n), (*)$$

donde

$$h[n] = \langle 2^{-1/2} \phi(t/2), \phi(t-n) \rangle$$

Se interpreta como un filtro discreto

$$(*) \Rightarrow \phi(t) = 2^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \phi(2t-n),$$

Ecuación de dilatación

Filtros Espejo Conjugados (cont.)

$$V_0 = \text{gen}\{\phi(t-n), n \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow 2^{-1/2} \phi(t/2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \phi(t-n), (*)$$

Aplicando FT en (*):

$$\hat{\phi}(2\omega) = 2^{-1/2} \hat{h}(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad \text{con} \quad \hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-in\omega}$$

¿ Podrá representarse $\hat{\phi}(\omega)$ como producto de dilataciones de $\hat{h}(\omega)$?

$$\hat{\phi}(2\omega) = 2^{-1/2} \hat{h}(\omega) \hat{\phi}(\omega)$$

$$\forall p \geq 0; \hat{\phi}(2^{-p+1}\omega) = 2^{-1/2} \hat{h}(2^{-p}\omega) \hat{\phi}(2^{-p}\omega)$$

↓ ← iterando

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^P \left[\frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \right] \hat{\phi}(2^{-P}\omega)$$

Si $\hat{\phi}$ es continua en $\omega = 0 \Rightarrow \lim_{P \rightarrow +\infty} \hat{\phi}(2^{-P}\omega) = \hat{\phi}(0)$

↓

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \left[\frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \right] \hat{\phi}(0) \Rightarrow \phi(t)$$

¿ Es $\phi(t)$ una función de escala?

Condiciones necesarias y suficientes (Mallat-1989, Meyer-1992)

Teorema: Sea $\phi \in L^2(\mathcal{R})$ una función de escala integrable a)

La serie de Fourier de

$$h[n] = \langle 2^{-1/2} \phi(t/2), \phi(t-n) \rangle$$

satisface:

$$\text{a.i) } \forall \omega \in \mathcal{R}, \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2,$$

$$\text{a.ii) } \hat{h}(0) = \sqrt{2}.$$

b) **Recíprocamente**, si $\hat{h}(\omega)$

i) es 2π periódica y diferenciable con continuidad en un entorno de $\omega=0$

ii) satisface (a.i) y (a. ii) del punto anterior y

$$\text{iii) } \inf_{\omega \in [-\pi/2, \pi/2]} |\hat{h}(\omega)| > 0$$

Entonces $\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \left[\frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \right] \hat{\phi}(0)$ es la FT de una función de escala $\phi \in L^2(\mathcal{R})$

29/05/2009

2009

35

Filtros Espejo Conjugados

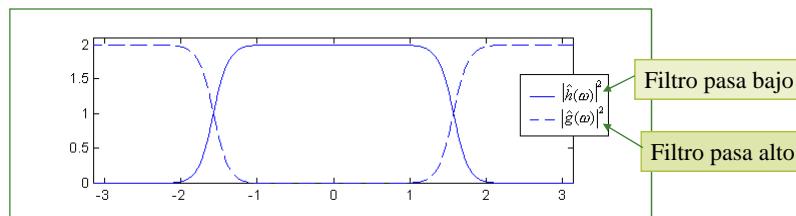
Los filtros discretos que satisfacen la condición

$$\text{a.i) } \forall \omega \in \mathcal{R}, \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2,$$

se denominan **Filtros Espejo Conjugados (CMF)**.

Utilidad:

Permiten descomponer una señal discreta en bandas de frecuencia separadas mediante bancos de filtros.



29/05/2009

$|\hat{h}(\omega)|^2, \omega \in [-\pi, \pi]$ para una multiresolución spline cúbica

34

Onditas Ortogonales

Las **onditas** ortogonales llevan los **detalles** necesarios para aumentar la resolución de una señal aproximada.

Las aproximaciones de f en las escalas 2^j y 2^{j-1} son sus proyecciones ortogonales en los espacios V_j y V_{j-1} .

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j-1} \Leftrightarrow V_{j-1} = V_j \oplus W_j$$

$$P_{V_{j-1}} f = P_{V_j} f + P_{W_j} f$$

Lleva los **detalles** de f que aparecen en la escala 2^{j-1} , pero que desaparecen en la escala **más tosca** 2^j .

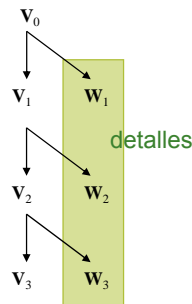
29/05/2009

APAS'2009

35

Descomposición en subespacios

Φ : función escala
 $\{\Phi_j(t-n)\}$ bases ortonormal de V_j



¿Bases para W_j ?

29/05/2009

APAS'2009

36

Construcción de bases ortogonales de W_j

Teorema:

Sea ϕ una función de escala y h el correspondiente filtro espejo conjugado. Sea ψ la función cuya transformada de Fourier es

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \text{ con } \hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi).$$

Indiquemos
$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right).$$

Para cualquier escala 2^j , $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una

base ortonormal de W_j .

Para todas las escalas, $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Dem:

$$i \quad \hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) ?$$

(MRA 2: $V_1 \subset V_0$) $V_0 = V_1 \oplus W_1$

Sea $\psi / \psi(t/2) \in W_1 \subset V_0 = \text{gen}\{\phi(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$

$$\psi(t/2) = \sum a_0[n] \phi_{0,n}(t), \text{ con } a_0[n] = \langle \psi, \phi_{0,n} \rangle.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi(t/2) = \sum g[n] \phi(t-n), \text{ con } g[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \psi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle.$$

Aplicando FT:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\psi}(2\omega) = \hat{g}(\omega) \hat{\phi}(\omega).$$

Lema (previo para continuar la Dem)

La familia $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_j si y sólo si

$$|\hat{g}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega + \pi)|^2 = 2$$

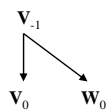
y
$$\hat{g}(\omega) \hat{h}^*(\omega) + \hat{g}(\omega + \pi) \hat{h}^*(\omega + \pi) = 0$$

Ideas importantes de la demo del Lema:

- $\{\psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal $\Leftrightarrow \forall \omega \in \mathfrak{R}, I(\omega) = \sum |\psi(\omega + k\pi)|^2 = 1$
- W_0 es ortogonal a $V_0 \Leftrightarrow \{\psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}} \perp \{\phi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$
- Verifica que $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$:

$$\forall a[n] \in l^2(\mathbb{Z}), \exists b[n] \in l^2(\mathbb{Z}) \text{ y } c[n] \in l^2(\mathbb{Z}) \text{ t.q.}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \sqrt{2} \phi(2[t - 2^{-1}n]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b[n] \phi(t - n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c[n] \psi(t - n)$$



$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \sqrt{2} \phi(2[t - 2^{-1}n]) \stackrel{?}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b[n] \phi(t - n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c[n] \psi(t - n)$$

Aplicando FT :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{b}(\omega) \hat{\phi}(\omega) + \hat{c}(\omega) \hat{\psi}(\omega)$$

Como
$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ y } \hat{\phi}(\omega) = 2^{-1/2} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

La ecuación se satisface necesariamente si

$$\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{b}(\omega) \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{c}(\omega) \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Definimos

$$\hat{b}(2\omega) = \frac{1}{2} [\hat{a}(\omega) \hat{h}^*(\omega) + \hat{a}(\omega + \pi) \hat{h}^*(\omega + \pi)] \Leftrightarrow b[n]$$

$$\hat{c}(2\omega) = \frac{1}{2} [\hat{a}(\omega) \hat{g}^*(\omega) + \hat{a}(\omega + \pi) \hat{g}^*(\omega + \pi)] \Leftrightarrow c[n]$$

Donde valen las hipótesis del lema y además que

$$|\hat{h}^*(\omega)|^2 + |\hat{h}^*(\omega + \pi)|^2 = 2$$

Fin Lema

¿ Que decía nuestro teorema ?

Teorema: Sea ϕ una función de escala y h el correspondiente filtro espejo conjugado. Sea ψ la función cuya transformada de Fourier es

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \text{ con } \hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi).$$

Indiquemos
$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right).$$

Para cualquier escala 2^j , $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_j .

Para todas las escalas, $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

29/05/2009

APAS'2009

41

(cont. Demo Teorema)

por Hipótesis : $\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi) \Rightarrow$ valen las hip. del lema \Rightarrow

☺ $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_j

☺ Los espacios detalle $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ son ortogonales

$$W_j \perp V_j ; W_l \subset V_{l-1} \subset V_j \quad \forall j < l \Rightarrow W_j \perp W_l$$

☺ $L^2(\mathfrak{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$

$$W_j \perp V_j ; V_{j-1} = W_j \oplus V_j \Rightarrow$$

$$J < L, V_J = W_{J+1} \oplus V_{J+1} = W_{J+1} \oplus W_{J+2} \oplus V_{J+2} = W_{J+1} \oplus \dots \oplus W_L \oplus V_L$$

$$V_J = \bigoplus_{j=J+1}^L W_j \oplus V_L, \text{ si } J < L$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \{0\} \Rightarrow \lim_{L \rightarrow +\infty} V_J = \bigoplus_{j=J+1}^{+\infty} W_j \oplus \lim_{L \rightarrow +\infty} V_L = \bigoplus_{j=J+1}^{+\infty} W_j$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \text{clos}\left(\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j\right) = L^2(\mathfrak{R}) \Rightarrow L^2(\mathfrak{R}) = \lim_{J \rightarrow -\infty} V_J = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$$

29/05/2009

APAS'2009

Fin Teorema

La dem del Teorema \Leftrightarrow

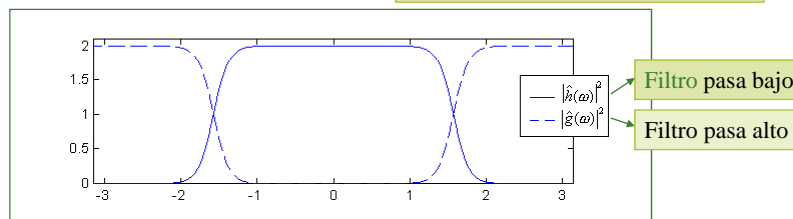
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi(t/2) = \sum g[n]\phi(t-n), \text{ con } g[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle \psi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle.$$

$$y \hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi) \text{ por Hipótesis.}$$

Aplicando FT¹ \Leftrightarrow

$$g[n] = (-1)^{1-n} h[1-n].$$

Filtro espejo para la ondita



29/05/2009

APAS'2009

43

Descomposición ondita

$$f \in L^2(\mathfrak{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$$

$$P_{W_j} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$$

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} P_{W_j} f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}(t)$$

Descomposición Ondita de $f(t)$

29/05/2009

APAS'2009

44

Onditas y Bancos de Filtros

$f \in L^2(\mathfrak{R}) \longrightarrow P_{V_j} f \begin{cases} \longrightarrow P_{V_{j+1}} f \\ \longrightarrow P_{W_{j+1}} f \end{cases}$

$a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle \quad \text{y} \quad d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle$

$\bar{x}[n] = x[-n]$
Reflexión

$\tilde{x}[n] = \begin{cases} x[p] & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p-1 \end{cases}$
Up Sampling

29/05/2009
APAS'2009
45

Transformada Ondita Ortogonal Rápida

Descomposición

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-2p] a_j[n] = a_j * \bar{h}[2p]$$

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2p] a_j[n] = a_j * \bar{g}[2p]$$

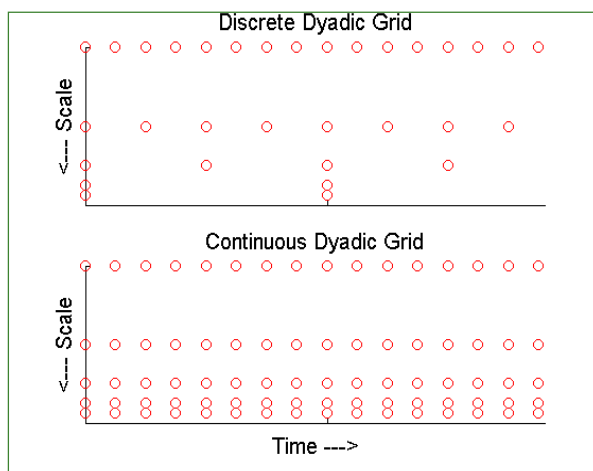
Reconstrucción

$$a_j[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[p-2n] a_{j+1}[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[p-2n] d_{j+1}[n]$$

$$= \tilde{a}_{j+1} * h[p] + \tilde{d}_{j+1} * g[p]$$

29/05/2009

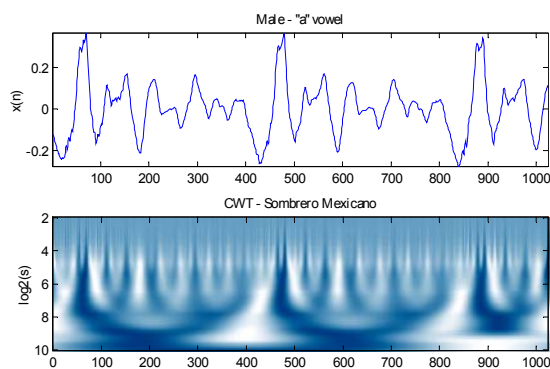
Wavelet Discreta vs. Wavelet Continua



29/05/2009

APAS'2009

47

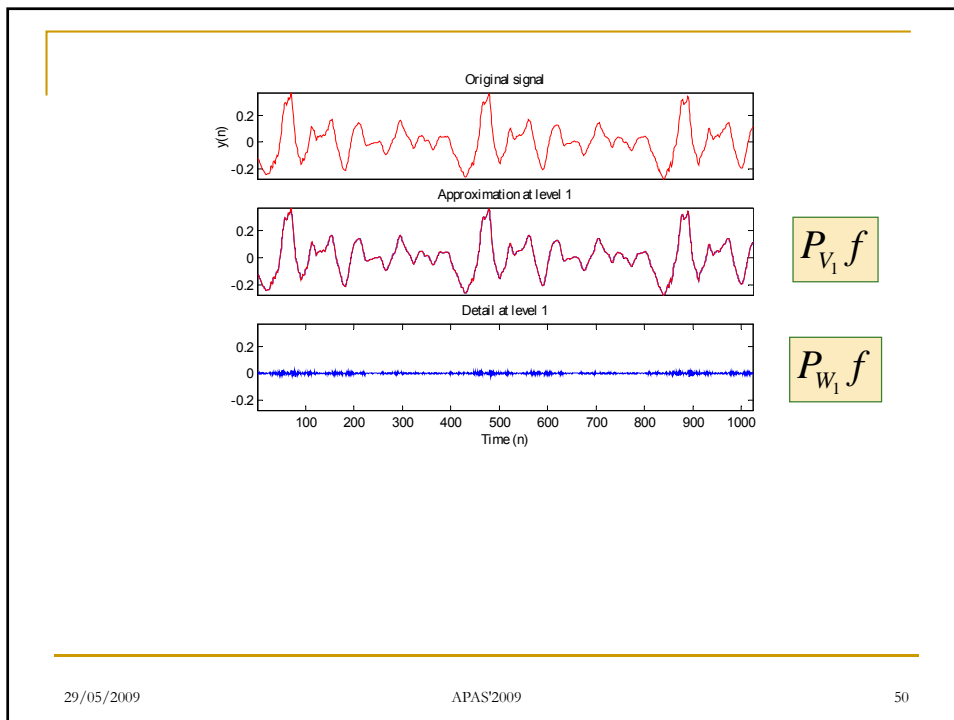
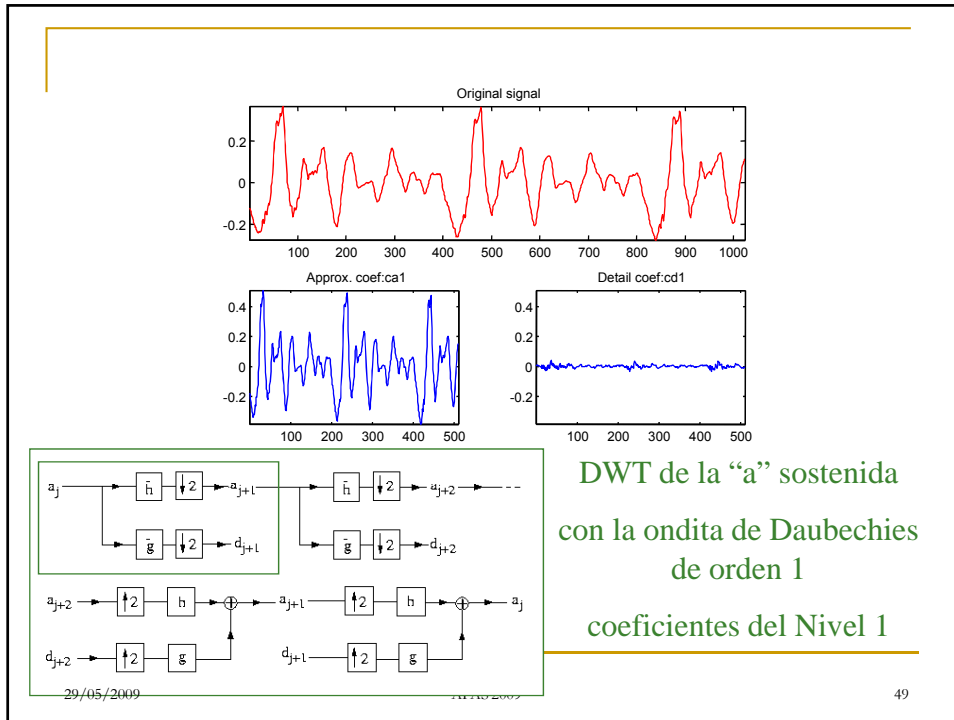


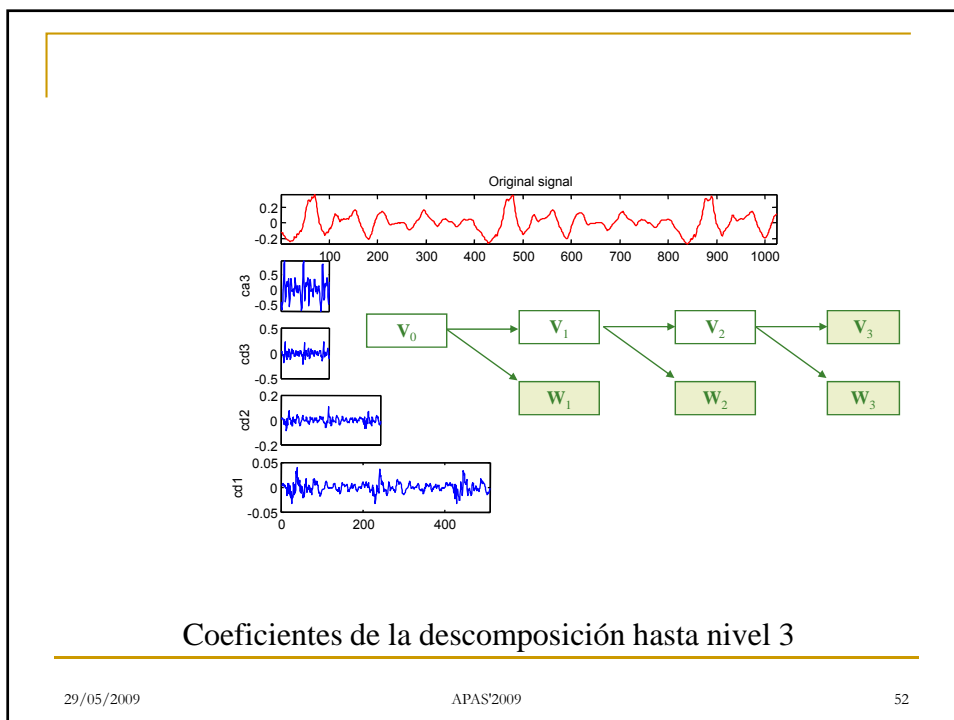
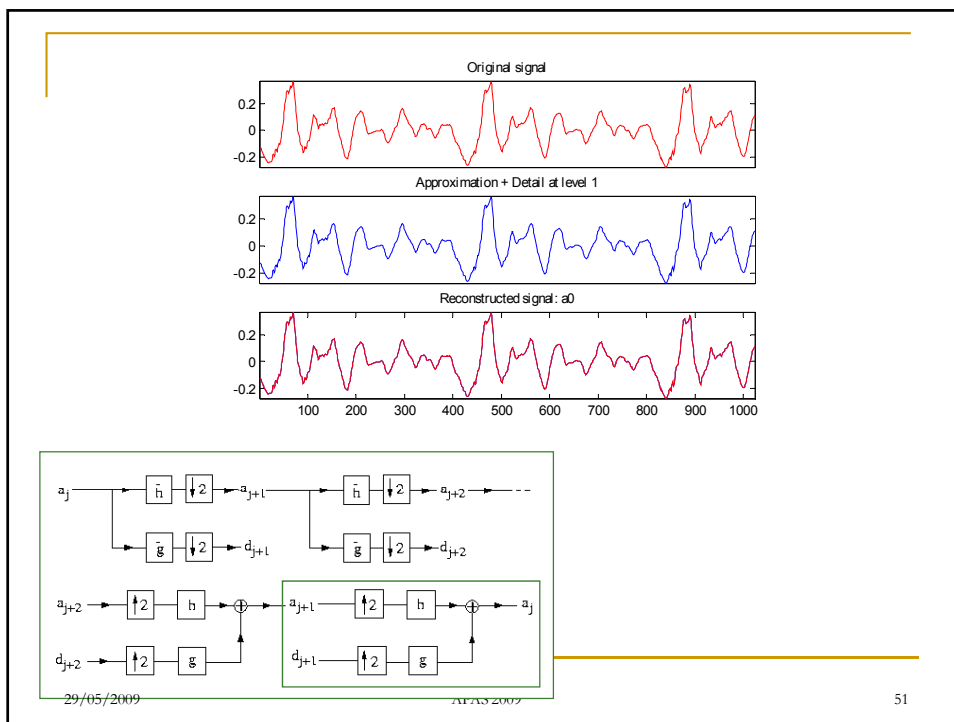
Escalograma obtenido con la descomposición Wavelet (cuasi-) continua

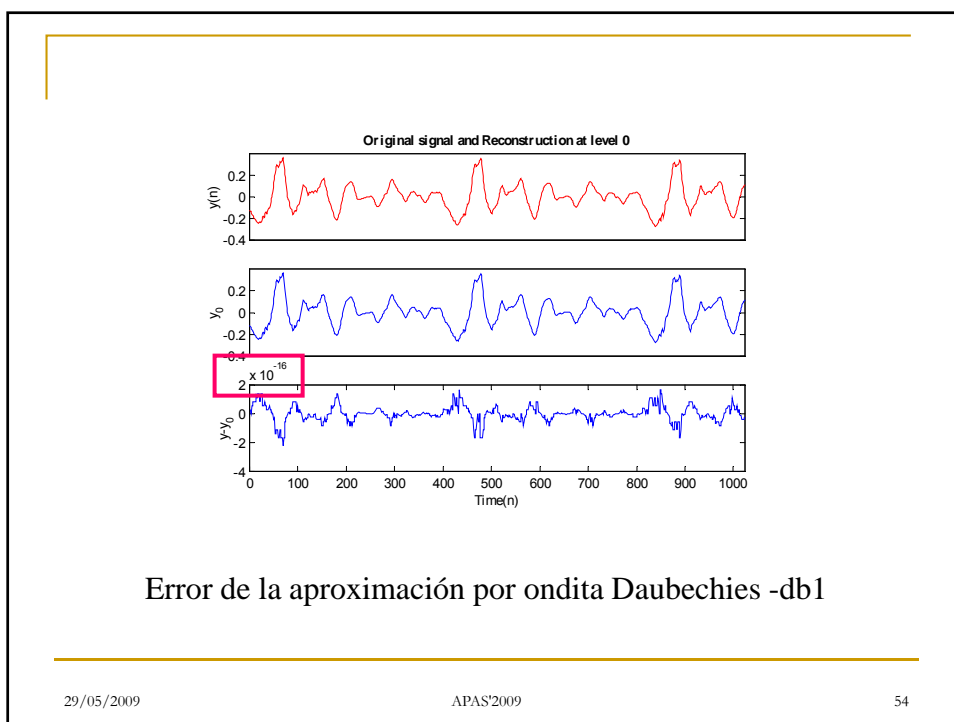
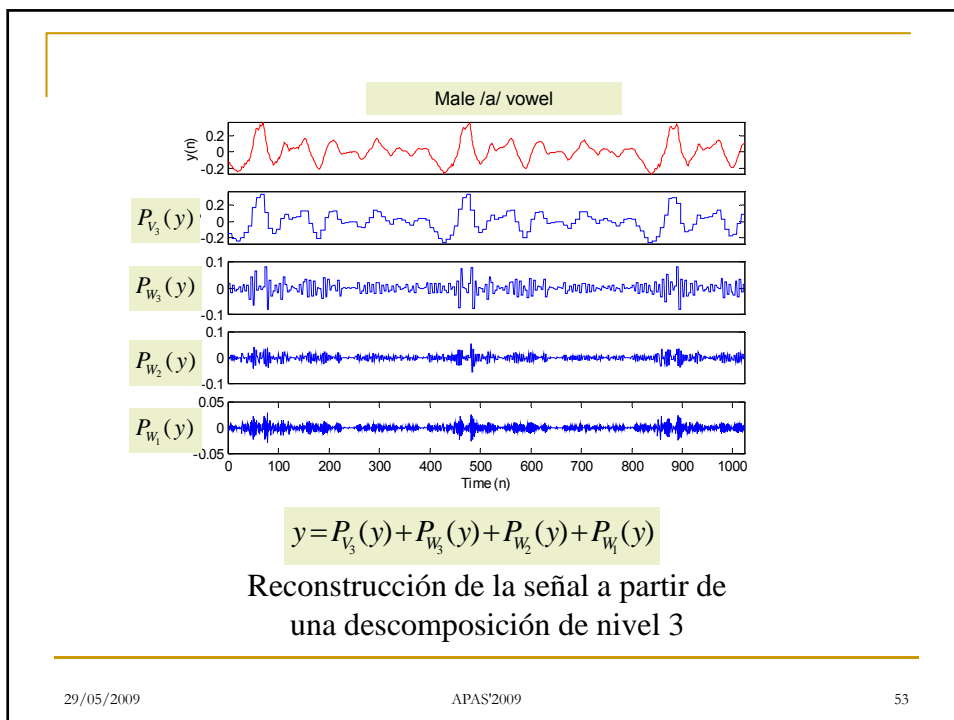
29/05/2009

APAS'2009

48







Ahora se esta en condiciones de leer la sección
5.5.1 de diseño de onditas y bancos de filtros