

ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO AVANZADO DE SEÑALES

Clase 6



Dra. María Eugenia Torres
Dr. Hugo Leonardo Rufiner
Dr. Diego H. Milone

Universidad Nacional de Entre Ríos
Facultad de Ingeniería
Laboratorio de Señales y
Dinámicas no Lineales

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ciencias Hídricas
SINC(i)

22/05/2009

Contenidos

- **Introducción**
Elementos de Matemáticas avanzadas. Operadores lineales. Proyecciones. Espacios vectoriales. Filtros lineales invariantes en el tiempo. Integrales de Fourier en L_1 y en L_2 . Propiedades. Filtros lineales discretos invariantes en el tiempo. Señales finitas.
- **Análisis tiempo-frecuencia**
La transformada Fourier por ventanas. La transformada ondita. Frecuencia instantánea. Energía tiempo-frecuencia instantánea.
- **Marcos**
Teoría de Marcos. Marcos en Fourier y en onditas. Invariancia ante traslación. Transformada Ondita Diádica.
- **Bases Ondita.**
Bases onditas ortogonales. Aproximaciones Multirresolución. Funciones escala. Filtros espejo conjugados. Clases de bases ondita. Onditas y bancos de filtros. Bases biortogonales.

22/05/2009

Comparación

	Ortogonal	l.i.	Form. de Plancherel	Generador
Base Ortonormal	SI	Si	Si	Si
Base de Riesz	No neces.	Si	No	Si
Marco	No neces.	No neces.	No	Si

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

3

Objetivo

H espacio de Hilbert

$\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ marco de H

$f \in H$

Recuperar f

a partir de

los productos internos $\langle f, \phi_n \rangle_{n \in \Gamma}$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

4

Operadores adjuntos

H y L : espacios de Hilbert

$$U : H \rightarrow L \quad \text{Operador Lineal}$$

Definición:

Se denomina **adjunto de U** al operador U^* :

$$U^* : L \rightarrow H$$

$$\langle U f, g \rangle = \langle f, U^* g \rangle$$

Si $U : H \rightarrow H$ se dice **auto-adjunto** si $U=U^*$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

5

Suma directa de sub-espacios

V: espacio Hilbert

M y N: subespacios de V

Es espacio vectorial $W = M \oplus N$ se denomina
la **suma directa de M y N** si:

$$i) M \perp N$$

$$ii) v \in M \oplus N, \exists n \text{ únicos } v_m \in M, v_n \in N / v = v_m + v_n$$

(ii) Puede sustituirse pidiendo $M \cap N = 0$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

6

Complemento ortogonal

V: espacio de Hilbert

El **complemento ortogonal** de un subespacio M de V se define como:

$$M^\perp = \{w \in V : \langle w, v \rangle = 0, \quad \forall v \in M\}$$

- i) es un subespacio de V
- ii) $V = M \oplus M^\perp$
- iii) Si $\dim(V) = n < \infty$ y $\dim(M) = m$, entonces $\dim(M^\perp) = n - m$.
- iv) $(M^\perp)^\perp = M$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

7

Pseudo Inversa (repass)

La **reconstrucción** de f a partir de los coeficientes marco $Uf[n]$ se calcula con una **pseudo- inversa**.

Es un operador acotado que se expresa con el **marco dual**.

H: espacio de Hilbert

$$l^2(\Gamma) = \left\{ x : \|x\|^2 = \sum_{n \in \Gamma} |x(n)|^2 < +\infty \right\}$$

$$U : \mathbf{H} \rightarrow l^2(\Gamma) \quad / \quad Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle$$

$$\text{Im } U = \{ Uf, \quad f \in \mathbf{H} \}$$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

8

Pseudo Inversa (Teorema)-repasso

$$U: \mathbf{H} \rightarrow l^2(\Gamma) \quad / \quad Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle$$

$$l^2(\Gamma) = \left\{ x : \|x\|^2 = \sum_{n \in \Gamma} |x(n)|^2 < +\infty \right\}$$

Teorema: Si $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ es un marco cuyos vectores son linealmente dependientes, entonces:

H) $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$: marco de H, vectores l.d

Tesis: 1) $\text{Im}U \subset l^2(\Gamma)$ **y es distinto de $l^2(\Gamma)$**

2) $\exists n$ infinitas $U^{-1} / \forall f \in \mathbf{H}, \bar{U}^{-1} U f = f$.

$$l^2(\Gamma) = \text{Im}U \oplus \text{Im}U^\perp \qquad U^{-1} : l^2(\Gamma) \rightarrow H$$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

9

La pseudo inversa de U (repasso)

$$U: \mathbf{H} \rightarrow l^2(\Gamma)$$

- Se define **la pseudo inversa de U** como la inversa izquierda de U que satisface:

$$\tilde{U}^{-1} : l^2(\Gamma) \rightarrow H /$$

$$i) \quad \tilde{U}^{-1} Uf = f, \quad \forall f \in H$$

$$ii) \quad \tilde{U}^{-1} x = 0, \quad \forall x \in (\text{Im}U)^\perp$$

Si $\dim(H)$ es infinito y U es inyectivo, entonces su pseudoinversa no es necesariamente acotada

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

10

De la Pseudo Inversa

$$U : \mathbf{H} \rightarrow l^2(\Gamma)$$

- Cuanto más redundante sea el marco $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$, mayor será el complemento ortogonal $\mathbf{Im}U^\perp$.
- Esto induce inestabilidades numéricas al tratar de reconstruir f a partir de Uf .

$$\|\tilde{U}^{-1}\|_S = \sup_{x \in l^2(\Gamma) - \{0\}} \frac{\|\tilde{U}^{-1}x\|}{\|x\|}.$$

Norma del Supremo

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

11

Teorema (de la Pseudo-Inversa)

La pseudo-inversa satisface $\tilde{U}^{-1} = (U^*U)^{-1}U^*$ (Adjunta de U)

- Es la inversa izquierda que tiene menor norma supremo.
- Si U es un operador marco con cotas A y B entonces

$$\|\tilde{U}^{-1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Entonces:

- un operador marco tiene siempre pseudo-inversa
- la pseudo-inversa está siempre acotada.

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

12

El Marco Dual**Teorema:**

Sea $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ un marco con cotas A y B.

El **marco dual** definido por $\tilde{\phi}_n = (U^*U)^{-1} \phi_n$ satisface

$$\forall f \in H, \quad \frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \tilde{\phi}_n \rangle|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|^2$$

$$\forall f \in H, \quad f = \tilde{U}^{-1} U f = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \tilde{\phi}_n \rangle \phi_n$$

Si es un marco justo, i.e. si $A=B$, entonces

$$\tilde{\phi}_n = A^{-1} \phi_n$$

$$\text{Fórmula de reconstrucción: } f = \frac{1}{A} \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

13

Operador Autoadjunto

$$L: H \rightarrow H \text{ autoadjunto} \Leftrightarrow \langle Lf, f \rangle = \langle f, L^* f \rangle \quad \text{y} \quad L = L^*$$

Lema:

Si L es un operador auto-adjunto tal que existen $A > 0$ y B que satisfacen

$$\forall f \in H, \quad A \|f\|^2 \leq \langle Lf, f \rangle \leq B \|f\|^2$$

entonces L es inversible y

$$\forall f \in H, \quad \frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \langle L^{-1} f, f \rangle \leq \frac{1}{A} \|f\|^2$$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

14

Bases biortogonales

$\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ es Base de Riesz

↓

$\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ es marco con vectores l.i.

↓ $l^2(\Gamma) = \text{Im}U \oplus \text{Im}U^\perp$

↓ $l^2(\Gamma) = \text{Im}U$

↓ $f = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \tilde{\phi}_n \rangle \phi_n, \forall f \in H$

↓ $\{\tilde{\phi}_n\}_{n \in \Gamma} = \{A^{-1}\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ son l.i.

↓ **Base Riesz dual**

22/05/2009 APAS'2005 - Clase 6 15

Bases biortogonales (cont.)

$\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ es Base de Riesz $\{\tilde{\phi}_n\}_{n \in \Gamma} = \{A^{-1}\phi_n\}_{n \in \Gamma}$

Base Riesz dual

$f = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \tilde{\phi}_n \rangle \phi_n, \forall f \in H$

↓

$\phi_p = \sum_{n \in \Gamma} \langle \phi_p, \tilde{\phi}_n \rangle \phi_n$

↓ $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ son li

$\langle \phi_p, \tilde{\phi}_n \rangle = \delta[n - p]$

La bases duales de Riesz son familias de vectores biortogonales

$\|\phi_n\| = 1 \implies A \leq 1 \leq B$

$\forall f \in H, \frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \tilde{\phi}_n \rangle|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|^2$

22/05/2009 APAS'2005 - Clase 6 16

Reconstrucción Parcial

Sea $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ un marco de un subespacio \mathbf{V} de todo el espacio de señales.

$$Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle$$

dan información parcial de f
no es suficiente para recuperarla completamente.

La mejor aproximación (cuadrática- media) son las proyecciones ortogonales de f en \mathbf{V}

$P_{\mathbf{V}}f$ se calcula con los marcos duales de ϕ_n

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

17

Proyección ortogonal (Operadores Lineales)

H : espacio de Hilbert

V : subespacio de H

Un **proyector** P_V en V es un operador lineal

$$P_V : H \rightarrow V$$

$$\forall f \in H, P_V f \in V \quad \text{y} \quad \forall f \in V, P_V f = f$$

Es **ortogonal** si

$$\forall f \in H, \forall g \in V, \langle f - P_V f, g \rangle = 0$$

(Ver propiedades en Mallat, pag 597)

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

18

$\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ un marco de un subespacio \mathbf{V}

$$P_{\mathbf{V}} f = \tilde{U}^{-1} U f = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n$$

Marco dual

$\zeta P_{\mathbf{V}}$ es la Proyección ortogonal en \mathbf{V} ?

- $\zeta P_{\mathbf{V}} f \in \mathbf{V}$ para $f \in H$?
- $\zeta \langle f - P_{\mathbf{V}} f, \phi_p \rangle = 0 \quad \forall p \in \Gamma$?

$$\begin{aligned} \langle f - P_{\mathbf{V}} f, \phi_p \rangle &= \langle f, \phi_p \rangle - \langle P_{\mathbf{V}} f, \phi_p \rangle \\ &= \langle f, \phi_p \rangle - \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \langle \tilde{\phi}_n, \phi_p \rangle, \end{aligned}$$

Por la propiedad de marco dual: $\sum_{n \in \Gamma} \langle \tilde{\phi}_n, \phi_p \rangle \phi_n = \phi_p$

$$\langle f - P_{\mathbf{V}} f, \phi_p \rangle = 0 \quad \forall p \in \Gamma$$

22/05/2009 APAS'2005 - Clase 6 19

Si se tiene un **número finito de datos**

$$\{\langle f, \phi_n \rangle\}_{0 \leq n < N}$$

Como la familia $\{\phi_n\}_{0 \leq n < N}$ es necesariamente un marco del espacio \mathbf{V} que genera,

la fórmula de reconstrucción

$$P_{\mathbf{V}} f = \tilde{U}^{-1} U f = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n$$

da la **mejor aproximación de f** .

22/05/2009 APAS'2005 - Clase 6 20

Proyección Marco y reducción de ruido

- La redundancia del marco es útil para reducir el ruido agregado a los coeficientes marco.
- El vector calculado con coeficientes ruido marco es proyectada en la ImU para reducir la amplitud del ruido.
- Esta técnica es utilizada para conversión de alta precisión analógica a digital basada en sobremuestreo.

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

21

Marcos con ventanas de Fourier

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

22

Marcos con Ventanas de Fourier

La teoría de marcos da condiciones para discretizar Transformada de Fourier por Ventanas.

$$g_{u,\xi} = g(t - u) \exp(i \xi t) \quad \|g\| = 1 \Rightarrow \|g_{u,\xi}\| = 1$$

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle$$

$$\{Sf(u_n, \xi_k) = \langle f, g_{u_n, \xi_k} \rangle\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$$

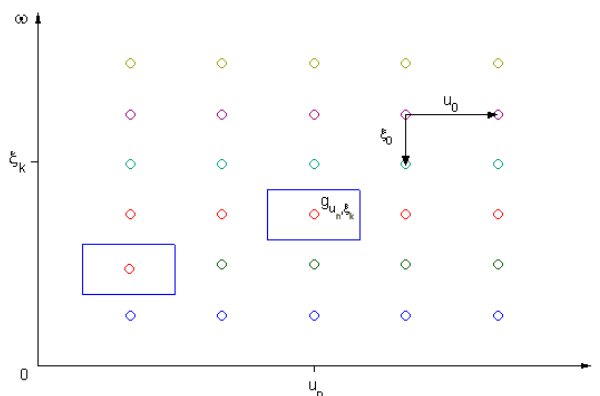
Representación Discreta de S

$$g_{u_n, \xi_k} = g(t - u_n) \exp(i \xi_k t) = g(t - n u_0) \exp(i k \xi_0 t)$$

u_0 y ξ_0 fijos

Es completa si $\{g_{u_n, \xi_k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ es un marco de $L^2(\mathbb{R})$

Discretización del plano Tiempo-Frecuencia



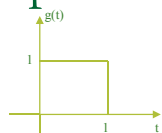
u_0 : long del intervalo temporal
 ξ_0 : long. del intervalo frecuencia
 $u_n = n u_0 ; \xi_k = k \xi_0$

Marco con ventanas Fourier y escalamiento temporal

$$g_{s,n,k}(t) = g(t - n s u_0) \exp(i k \frac{\xi_0}{s} t)$$

¿Cuál es el efecto si $s=1/2$?

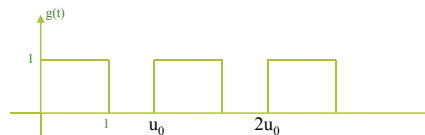
Ejemplo



$$g_{n,k}(t) = g(t - n u_0) \exp(i k \xi_0 t)$$

- ¿Qué pasa con $g(t - n u_0)$ si $u_0 > 1$?

No podrán ser un marco



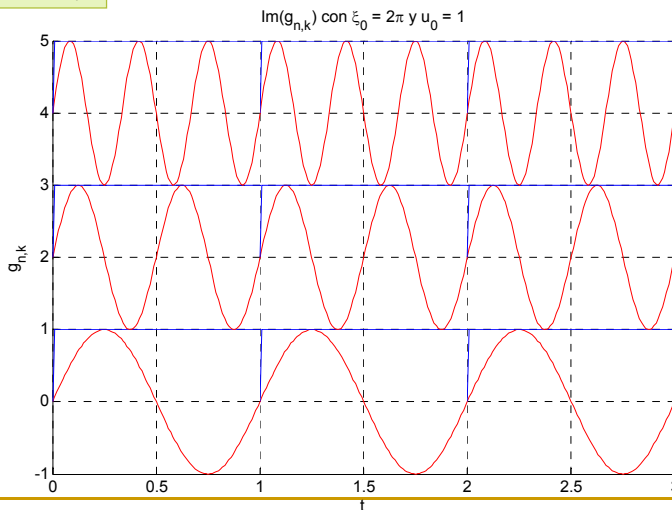
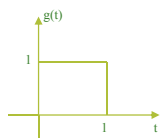
- ¿Qué pasa con $g(t - n u_0)$ si $u_0 = 1$?

En cada ventana tendremos exponenciales

- ¿Qué pasa con $g_{s,n,k}$ si $\xi_0 = 2\pi$?

Ejemplo: $\xi_0 = 2\pi, u_0 = 1$

$$g_{n,k}(t) = g(t - n u_0) \exp(i k \xi_0 t)$$



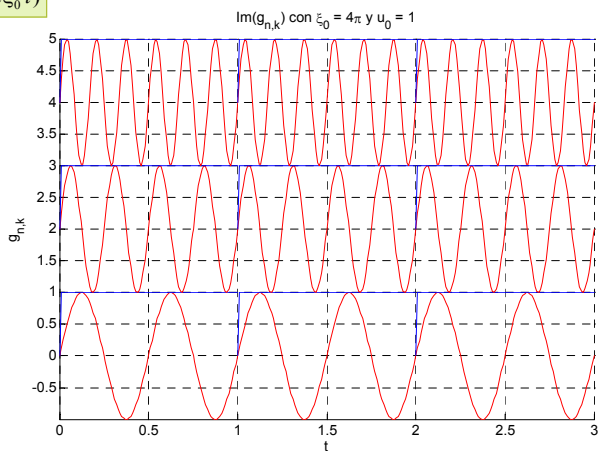
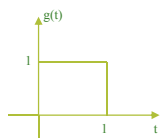
22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

27

Ejemplo $\xi_0 = 4\pi > 2\pi, u_0 = 1$

$$g_{n,k}(t) = g(t - n u_0) \exp(i k \xi_0 t)$$



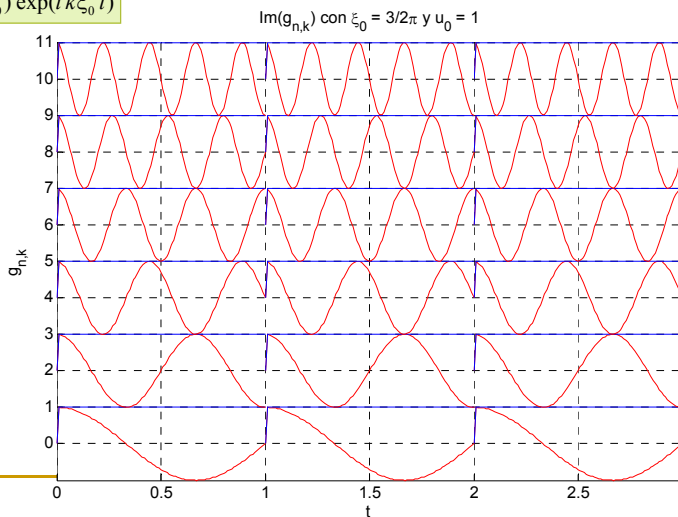
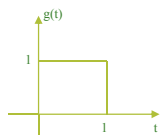
22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

28

Ejemplo $\xi_0 = 3/2\pi < 2\pi$, $u_0 = 1$

$$g_{n,k}(t) = g(t - n u_0) \exp(i k \xi_0 t)$$

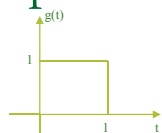


22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

29

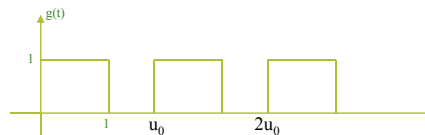
Ejemplo



$$g_{n,k}(t) = g(t - n u_0) \exp(i k \xi_0 t)$$

- ¿Qué pasa con $g(t - n u_0)$ si $u_0 > 1$?

No podrán ser un marco



- ¿Qué pasa con $g(t - n u_0)$ si $u_0 = 1$?

En cada ventana tendremos exponenciales

- ¿Qué pasa con $g_{s,n,k}$ si $\xi_0 = 2\pi$?

Son un base ortonormal en de $L^2([0,1])$

- ¿Qué pasa con $g_{s,n,k}$ si $\xi_0 < 2\pi$?

Son un marco en de $L^2([0,1])$

- ¿Qué pasa con $g_{s,n,k}$ si $\xi_0 > 2\pi$?

NO son un marco en de $L^2([0,1])$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

30

Marco con ventanas Fourier

$$g_{n,k}(t) = g(t - nu_0) \exp(ik \xi_0 t)$$

El intervalo de muestreo (u_0, ξ_0) se ajusta con la dispersión temporal de g .

$\{g_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ es un marco en $L^2(\mathbb{R})$, con cotas A y B.

Ventanas dilatadas: $g_s(t) = s^{-1/2} g(t/s)$

Se obtiene el mismo cubrimiento del Plano T-Fr aumentando u_0 con s y reduciendo la frecuencia ξ_0 con s .

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

31

Marco con ventanas Fourier y escalamiento temporal

$$g_{s,n,k}(t) = g(t - nsu_0) \exp(ik \frac{\xi_0}{s} t)$$

$\{g_{s,n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ satisface la misma desigualdad de marco que $\{g_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ con iguales cotas A y B con un cambio de variables $t' = ts$ en los productos internos.

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

32

Condiciones Necesarias

Teorema (Daubechies,1992): La familia de ventanas de Fourier

$\{g_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ es un marco si y sólo si

$$\frac{2\pi}{u_0 \xi_0} \geq 1$$

mide la densidad de los átomos

Las cotas del marco A y B necesariamente satisfacen

$$A \leq \frac{2\pi}{u_0 \xi_0} \leq B,$$

Traslaciones temporales uniformes de g cubren el eje temporal

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A \leq \frac{2\pi}{\xi_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(t - n u_0)|^2 \leq B,$$

(Demo general, Chui y Shi, 1993)

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad A \leq \frac{2\pi}{u_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega - k \xi_0)|^2 \leq B,$$

Traslaciones en frecuencia uniformes de \hat{g} cubren el eje de frecuencias

Condiciones Necesarias (cont.)

$\|g_{u,\xi}\| = 1 \Rightarrow$ (el marco es Base Ortogonal $\Leftrightarrow A = B = 1$)

$A \leq \frac{2\pi}{u_0 \xi_0} \leq B \Rightarrow$ sólo es posible para la densidad crítica

$$2 \pi = u_0 \xi_0$$

En ese caso, g puede ser no suave o bien tener decaimiento temporal lento (Teorema de Balian-Low, 1982)

i.e

No se puede construir una base de Fourier por ventanas ortogonales con una ventana g diferenciable de soporte compacto

$$g = \frac{1}{\sqrt{u_0}} \chi_{[-u_0/2, u_0/2]}$$

Da bases ortogonales de Fourier por ventanas para $2 \pi = u_0 \xi_0$

Mala localización frecuencial ☹

Daubechies (1990) → Condiciones Suficientes para construir marcos Fourier por ventanas.

Marcos Duales

Los marcos duales de los vectores marco por ventanas son también marcos Fourier por ventanas

i.e.

traslaciones en tiempo y frecuencia de una nueva ventana \tilde{g}

$$\tilde{g}_{n,k} = (U^* U)^{-1} g_{n,k}$$

$$\tilde{g}_{n,k}(t) = \tilde{g}(t - n u_0) \exp(i k \xi_0 t)$$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

35

Marcos Ondita

Los marcos ondita son construidos por muestreo de los parámetros tiempo y escala de la CWT.

$$Wf(u,s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt$$

$$\psi_{u,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) \quad \|\psi\| = 1 \Rightarrow \|\psi_{u,s}\| = 1$$

$s = a^j$, paso de dilatación $a > 1$ suficientemente pequeño

$$u = n u_0 a^j$$

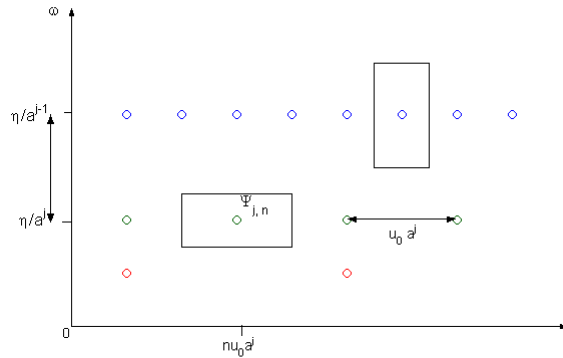
$$\psi_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi \left(\frac{t - n u_0 a^j}{a^j} \right)$$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

36

Marcos Ondita: Tiempo frecuencia



¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes sobre ψ , a y u_0 para que $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ sea marco de $L^2(\mathbb{R})$?

Marcos Ondita: Condiciones Necesarias

ψ real, normalizada y satisface la condición de admisibilidad:

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty$$

Teorema (Daubechies): Si $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ es un marco de $L^2(\mathbb{R})$, entonces sus cotas satisfacen:

Densidad de muestreo

$$A \leq \frac{C_\psi}{u_0 \log_e a} \leq B$$

El marco es base ortonormal sii $A=B=1$

$$\forall \omega \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad A \leq \frac{1}{u_0} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 \leq B$$

Garantiza que el eje de las frecuencias es cubierto por las onditas dilatadas ☺

Marcos Ondita: Condiciones Suficientes

Daubechies (1992) en

“Ten lectures on Wavelets”

da cotas superiores e inferiores sobre las cotas A y B,

dependientes de ψ , u_0 y a ,

las que son condiciones suficientes para que $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$

sea un marco ondita de $L^2(\mathbb{R})$.

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

39

Marcos Duales Ondita

Vectores marco Ondita Dual

$$\tilde{\psi}_{j,n} = (U^* U)^{-1} \psi_{j,n}$$

¿ Las onditas duales $\tilde{\psi}_{j,n}$ pueden obtenerse por dilataciones de escala y traslaciones de la ondita dual $\tilde{\psi}$?

☹ **En general esto no es cierto!!!** ☹

• ☹ El operador U^*U en general no conmuta con dilataciones por $a^j \Rightarrow (U^*U)^{-j}$ tampoco lo hace.

• ☺ Pero si conmuta con traslaciones $n a^j u_0$!!!

$$\tilde{\psi}_{j,n}(t) = \tilde{\psi}_{j,0}(t - n a^j u_0)$$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

40

Marcos Duales Ondita

$\{\tilde{\psi}_{j,n}\}_{n,j \in \mathbb{Z}}$ se obtiene calculando cada función

elemental $\tilde{\psi}_{j,0}$ con $\tilde{\psi}_{j,0} = (U^* U)^{-1} \psi_{j,0}$

y trasladando con $\tilde{\psi}_{j,n}(t) = \tilde{\psi}_{j,0}(t - n a^j u_0)$

Para marcos justos :

el marco dual es igual al marco ondita original

22/05/2009

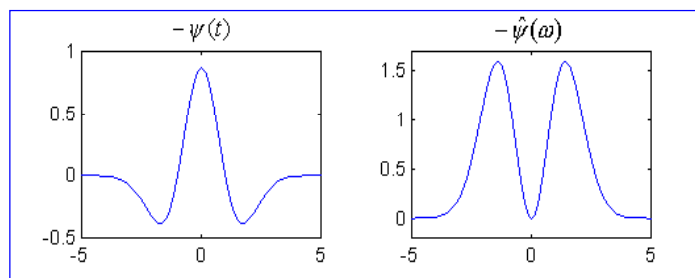
APAS'2005 - Clase 6

41

Ejemplo: Ondita Sombrero Mejicano

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (t^2 - 1) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = -\frac{\sqrt{8} \pi^{1/4} \omega^2}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{-\omega^2}{2}\right)$$



22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

42

Aproximación del marco dual

(I. Daubechies, "Ten lectures on Wavelets", 1992)

- Con $a = 2^{1/\nu}$, $\nu > 2$ **voces por escala**, el marco es casi justo cuando $u_0 \leq 0.5$.



El marco dual puede aproximarse por el marco ondita.

Cuando $A \approx B$:

$$A \approx B \approx \frac{C_\psi}{u_0 \log_e a} = \frac{\nu}{u_0} C_\psi \log_2 e$$

$a = 2^{1/\nu}$

A y B aumentan proporcionalmente a ν/u_0

Ver tabla 5.4 en Mallat

Invariancia por Traslaciones

Transformaciones Continuas

$$f_\tau(t) = f(t - \tau)$$

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt = f * \bar{\psi}_s(u) \quad ,$$

$$\text{con } \bar{\psi}_s(t) = s^{-1/2} \psi(-t/s).$$

$$Wf_\tau(u, s) = f_\tau * \bar{\psi}_s(u) = Wf(u - \tau, s)$$

CWT es invariante por traslaciones

Invarianza de WFT

$$f_{\tau}(t) = f(t - \tau)$$

$$Sf(u, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - u) e^{-it\xi} dt = e^{-iu\xi} f * \bar{g}_{\xi}(u)$$

$$\text{con } \bar{g}_{\xi}(t) = g(-t) \exp(i\xi t)$$

$$Sf_{\tau}(u, \xi) = e^{-iu\xi} f * \bar{g}_{\xi}(u - \tau) = e^{-i\tau\xi} Sf(u, \xi)$$

WFT es invariante por traslaciones
salvo un desplazamiento en la fase.

Muestreo Marco Ondita

$$\psi_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{t - n u_0 a^j}{a^j}\right)$$

Marco Ondita

$$\langle f, \psi_{j,n} \rangle = f * \bar{\psi}_{a^j}(n u_0 a^j) = Wf(n u_0 a^j, a^j)$$

Realiza productos internos que muestrean la transformada ondita continua en intervalos $u_0 a^j$.

$$\langle f_{\tau}, \psi_{j,n} \rangle = f * \bar{\psi}_{a^j}(n u_0 a^j - \tau) = Wf(n u_0 a^j - \tau, a^j)$$

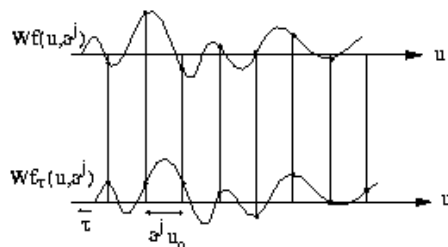
Intervalo de muestreo

No hay invariancia



Fenómeno de distorsión
en las onditas de bases
ortogonales.

Muestreo Marco



si $\tau \neq k u_0 a^j$

$Wf_\tau(u, a^j) \neq Wf(u, a^j)$, en $u = n a^j u_0$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

47

Transformada Ondita Diádica - Cuasicontinua

- la escala $s=2^j$.
- el parámetro de traslación u no se discretiza.

⇓

Representación ondita invariante en el tiempo.

$$Wf(u, 2^j) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{2^j} \psi\left(\frac{t-u}{2^j}\right) dt = f * \bar{\psi}_{2^j}(u)$$

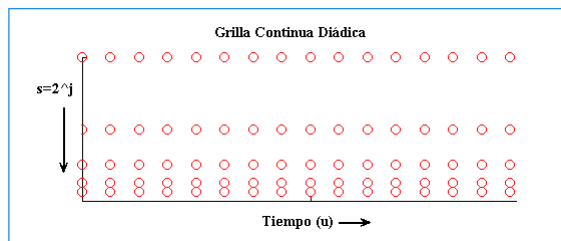
con $\bar{\psi}_{2^j}(t) = \psi_{2^j}(-t) = \frac{1}{2^j} \psi\left(\frac{-t}{2^j}\right)$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

48

Grilla Diádica - Cuasicontinua



Teorema:

Si existen dos constantes $A > 0$ y $B > 0$ tales que

$$\forall \omega \in \mathbb{R} - \{0\} \quad , \quad A \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 \leq B,$$

entonces

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \|Wf(u, 2^j)\|^2 \leq B \|f\|^2$$

Y si

$$\forall \omega \in \mathbb{R} - \{0\} \quad , \quad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}^*(2^j \omega) \hat{\psi}(2^j \omega) = 1$$

entonces

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^j} Wf(\cdot, 2^j) * \tilde{\psi}_{2^j}(t).$$

Interpretación

Si el eje de frecuencias es cubierto completamente por onditas diádicas dilatadas



entonces la $Wf(u, 2^j)$ define una representación estable y completa.

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \|Wf(u, 2^j)\|^2 \leq B \|f\|^2$$

↓

$$Uf[j, u] = \frac{1}{2^j} Wf(u, 2^j) = \left\langle f, \frac{1}{2^j} \psi_{2^j}(t - u) \right\rangle$$

Operador Transformada Ondita Diádica Normalizado

Satisface la condición de marco

↓

Existe una infinidad de onditas de reconstrucción, que corresponden a diferentes inversas izquierdas de U

Si $\hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2}$, la inversa izquierda es la pseudo inversa \tilde{U}^{-1} .

Transformada Ondita Diádica – (WaveLab802)

FWT_ATrou -- Fast Dyadic Wavelet Transform (periodized, orthogonal)

Usage

dwt = FWT_ATrou(x,L)

Inputs

x 1-d signal; length(x) = 2^J = n

L Coarsest Level of V₀; L << J

Outputs

dwt an n times J-L+1 matrix

giving the wavelet transform of x at all dyadic scales.

Description

To reconstruct use IWT_ATrou

```
s='mysignal';
L = 2; %3;
dwt = FWT_ATrou(s,L);
```

```
figure(1);clf
DisplayDWT(dwt,4,s);
figure
DisplayDWT(dwt,5,s);
```

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

53

Ondita Spline Cuadrática

$$\beta_0(t) = \chi_{[0,1]}(t)$$

Spline de orden cero

$$\beta_1(t) = \beta_0 * \beta_0(t) = \beta_0^2(t)$$

Spline de 1^{er} orden

$$\beta_2(t) = \beta_1 * \beta_0(t) = \beta_0^3(t)$$

Spline de 2^{do} orden

$$\phi(t) = \beta_m(t) = \beta_0^{m+1}(t)$$

$$\text{centrada en } t = \begin{cases} 1/2 & \text{si } m \text{ es par} \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^{m+1} \exp\left(\frac{-i\varepsilon\omega}{2}\right), \quad \text{con } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par} \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

22/05/2009

APAS'2005 - Clase 6

54

Ondita Spline Cuadrática

$$\hat{g}(\omega) = -i\sqrt{2} \sin\frac{\omega}{2} \exp\left(-\frac{i\epsilon\omega}{2}\right)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{i\omega}{4} \left(\frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4}\right)^{m+2} \exp\left(-\frac{i\omega(1+\epsilon)}{4}\right)$$

Ondita spline

$m = 2$

22/05/2009
APAS'2005 - Clase 6
55

Demo

Señal original - N = 256

Coeficientes de la función escala

s Señal Original;
 $\text{length}(s) = 2^J = N = 256;$ $J=8; N=256;$
 L Nivel más tosco de $V_0;$ $L \ll J;$ $L=2;$

Outputs

dwt matriz de $N \times J-L+1$ $256 \times (8-2+1) = 256 \times 7$

El primer renglón $\text{dwt}(:,1)$ corresponde
a los coeficientes de escala

22/05/2009
APAS'2005 - Clase 6
56

