ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO AVANZADO DE SEÑALES

Clase 5

Dra. María Eugenia Torres
Dr. Hugo Leonardo Rufiner
Dr. Diego H. Milone

Universidad Nacional de Entre Ríos
Facultad de Ingeniería
Laboratorio de Señales y Dinámicas no Lineales

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ciencias Hídricas
SINC(i)

15/05/2009

Contenidos

- **Introducción**
  Elementos de Matemáticas avanzadas. Operadores lineales. Proyecciones. Espacios vectoriales. Filtros lineales invariantes en el tiempo. Integrales de Fourier en L1 y en L2. Propiedades. Filtros lineales discretos invariantes en el tiempo. Señales finitas.
- **Análisis tiempo-frecuencia**
  La transformada Fourier por ventanas. La transformada ondita. Frecuencia instantánea. Energía tiempo-frecuencia instantánea.
- **Marcos**
  Teoría de Marcos. Marcos en Fourier y en onditas. Invariancia ante traslación. Transformada Ondita Diádica.
- **Bases Ondita**.
  Bases onditas ortogonales. Aproximaciones Multirresolución. Funciones escala. Filtros espejo conjugados. Clases de bases ondita. Onditas y bancos de filtros. Bases biortogonales.
- **Aplicaciones.**

15/05/2009

Teoría de Marcos

Las transformadas:

• discreta de Fourier por ventanas,

• ondita discreta,

generan representaciones de la señal que no son invariantes en tiempo.

T. Ondita diádica (muestreando sólo el parámetro de escala de una CWT)

• mantiene TI.

• Algoritmo de banco de filtros permite calcular la Fast dyadic Wavelet transform.

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 3

Teoría de Marcos

R. Duffin y A.C.Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier Series,Trans. Amer. Math. Soc. 1952.

f: señal de banda limitada, muestreada a intervalos irregularmente espaciados $\{f(t_n)\}_{n\in Z}$

Analiza:

- La completitud,
- La estabilidad,
- La redundancia,

de representaciones lineales de señales discretas.

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 4

Elementos de algebra lineal

- A es una matriz pxp, tiene p autovalores
- $A=P\Lambda P^{-1}$, Λ matriz diagonal.
- $T(v)=A.v$ Transformación lineal

Equivalencia entre estructuras

Elementos de Algebra Lineal

Sea A una matriz dada.

a) Una matriz *L* se llama **inversa izquierda** de *A* si $L.A=I$.

b) Una matriz *L* se llama **inversa derecha** de *A* si $A.L=I$.

c) Una matriz *L* se llama **inversa (bilateral)** de *A* si $L.A=A.L=I$, *y se indica* $L=A^{-1}$

Un matriz **no singular** *es una matriz (necesariamente cuadrada) A que tiene inversa (bilateral)*

Un matriz **singular** *es una matriz cuadrada que no tiene inversa*

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 7

Transformaciones de semejanza

- Si existe una matriz *P no singular*, tal que $P^{-1}.A.P = B$ se dice que ***B* es semejante a *A*** y que se obtiene de *A* por medio de una transformación de semejanza

Ejemplo: cambios de base (*ortogonales y ortonormales*)

$$A = (a_{i,j}) \in \Re^{p\times q}, \quad A^t = (a_{j,i}) \in \Re^{q\times p}$$ Traspuesta de A

$$A \in C^{pxq}, \quad A^H = (a^*_{j,i}) \in C^{q\times p}$$ **Traspuesta Hermitiana de A** o **Adjunta Hermitiana de A**

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 8

Elementos de Algebra Lineal

Una matriz A (en R^p o C^p) se dice

Simétrica *sii* $A = A^t$

Hermítica o Hermitiana *sii* $A = A^H$

Unitaria (A cuadrada) *sii*

$$A^{-1} = A^H \text{ y } A^{-1} A = A A^{-1} = I$$

Ortonormal u ortogonal *sii* es real y unitaria

(B. Noble, J. Daniel, Algebra Lineal Aplicada, Prentice Hall, 3rd. Ed. , cap. 7, 1989)

Propiedades (I)

Una matriz ortonormal A
preserva el producto interno (real) de dos vectores reales:

Si *A* ortogonal, *x,y* de R^n ==> $<Ax , Ay>=<x,y>$

Una matriz unitaria U
preserva el producto interno de dos vectores complejos

Si U unitaria, x,y de C^n => $<Ux , Uy> = <x,y>$

Normas de matrices

A : matriz pxq

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|}$$

sum(abs(A')) = 2.0000 0.7321 -2.7321

$$\boxed{\|A\|_{\infty} = norm(A, \inf) = 2.7321}$$

$$\boxed{\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{p} |a_{i,j}|}$$

sum(abs(A)) = 4.0000 3.4641

$$\boxed{\|A\|_1 = norm(A,1) = 4}$$

$$\boxed{\|A\|_2 = \left(\max_j \{\text{autovalor de } A^H.A\}\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{\|A\|_2 = norm(A,2) = \sqrt{6} = 2.4495}$$

Descomposición en valores singulares (SVD)

A matriz pxq

$\exists U \in C^{pxp}$ unitaria (Ortogonal si A es real)

$\exists V \in C^{qxq}$ unitaria (Ortogonal si A es real)

$\exists \Sigma \in C^{pxq}$ "diagonal" / $\Sigma_{i,j} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ \sigma_i \geq 0 & si\ i = j \end{cases}$

$$\sigma_i \geq \sigma_j \ si\ i > j > s = \min\{p, q\}$$

$$\boxed{A = U\,\Sigma\,V^H \quad (\text{o } A = U\,\Sigma\,V^T \text{ si A es real})}$$

(Ben Noble y James W. Daniel, "Algebra Lineal Aplicada", Prentice Hall, 3rd ed., cap. 8, 1989.)

SVD (cont)

$$A = U \Sigma V^H \ \ (\text{o } A = U \Sigma V^T \text{ si A es real})$$

Calculando A.A^H y A^H .A:

Vectores singulares izquierdos

Valores singulares de A

σ_i^2 autovalores de $A^H A$

v_i : cols. de V, autovect. asoc.

σ_i^2 autovalores de $A\,A^H$

u_i : cols. de U, autovect. asoc.

$$u_i^H A = \sigma_i v_i^H$$

$$A\,v_i = \sigma_i\,u_i, \quad i = 1, \ldots, s$$
$$s = \min(p, q).$$

Vectores singulares derechos

Ejemplo (SVS)

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = norm(A,1) = 4$$

$$\|A\|_2 = norm(A,2) = \sqrt{6} = 2.4495$$

$$\|A\|_{\backslash\mathrm{inf}\,ty} = norm(A,\inf) = 2.7321$$

```
A=[2 0 ;-1 sqrt(3) ; -1 -sqrt(3)];
A =
   2.0000       0
  -1.0000   1.7321
  -1.0000  -1.7321
A'*A
 A'*A =
             6   0
             0   6
A*A'
 A*A'=
   4.0000  -2.0000  -2.0000
  -2.0000   4.0000  -2.0000
  -2.0000  -2.0000   4.0000
%----------------------------------
ev2=eigs(A*A')
ev2 =
          6.0000
          6.0000
         -0.0000
%----------------------------------
sqrt(6) = 2.4495
```

[U,S,V] = svd(A)

Autovectores de A'A

Unitarias (Ortogonal)

U =

-0.0000	-0.8165	0.5774
-0.7071	0.4082	0.5774
0.7071	0.4082	0.5774

$(\sigma_i)^2 = \lambda_i$

S =

2.4495	0
0	2.4495
0	0

Autovectores de AA'

V =

0	-1
-1	0

$$A_T = U\,S\,V^t = U\,S\,V^H$$

$$A_T\, v_i = \sigma_i\, u_i \qquad A_T^H\, u_i = \sigma_i\, v_i$$

$(\sigma_i)^2 = \lambda_i$

σ_i valores singulares de A

```
%----------------------------------
sv=svds(A) % valores singulares de A
sv =
   2.4495
   2.4495
%----------------------------------
ev1=eigs(A'*A)
ev1 =
   6.0000
   6.0000
%----------------------------------
ev2=eigs(A*A')
ev2 =
   6.0000
   6.0000
  -0.0000
%----------------------------------
sqrt(6) = 2.4495
%----------------------------------
norm(A) =  2.4495
```

“marco”

$\|A\|_2 = \sqrt{6} = 2.4495$

SVD y transformaciones lineales

$$T : V \rightarrow W \qquad \text{dim(V)=q , dim(W)=p;}$$

$$T(v) = A.v, \quad A \in C^{p,q}$$

- El $rg(\mathbf{A}) = k$ es igual al número de valores singulares no nulos de **A**.

- Los primeros k vectores singulares izquierdos $u_1, \ldots, u_k$ forman una base ortonormal del espacio de columnas de **A**, i.e. para el codominio de T(v) = **A**v

- Los últimos q - k vectores singulares derechos $v_{k+1}, \ldots, v_q$ forman una base ortonormal del espacio nulo de T (del núcleo de T).

SVD y normas

$$A = (a_{i,j}) \text{ es } p \times q\,,\ \mathbf{T}(v) = \mathbf{A}v$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{q} |a_{i,j}| \qquad \|A\|_\infty = \max_j \sum_{i=1}^{q} |a_{i,j}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left(\max \text{Autovalor de } \mathbf{A}^H \mathbf{A} \right)^{1/2}$$
$$= \max \text{Valor Singular de } \mathbf{A}$$

Mínimos Cuadrados, Pseudo Inversa y Valores Singulares

$A = U\,\Sigma\,V^H$ una SVD de A, pxq, de rango k

$A^+ = V\,\Sigma^+\,U^H$ es la **Pseudo Inversa de A**

$$\text{donde} \quad \Sigma^+ = \left(\Sigma^+_{i,j}\right) \quad p \times q \,/\, \Sigma^+_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1/\sigma_i & i = j \end{cases}$$

$$\text{con } \sigma_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k \quad ; \quad \sigma_i = 0, \quad k+1 \leq i \leq \min\{p,q\}$$

- $x_0 = A^+ b$ hace mínima $\|A\,x - b\|_2$, con respecto a x.
- Entre todas las x' que hacen mínima $\|A\,x - b\|_2$, $x_0 = A^+ b$ es el ínfimo.
- x' hace mínima $\|A\,x - b\|_2 \Leftrightarrow x' = x_0 + v$, donde v es una c.l. arbitraria de las q-k columnas finales de V y $x_0 = A^+ b$.

Pseudo Inversa

$A = U\,\Sigma\,V^H$ una SVD de A, pxq, de rango k

$\Sigma = \lfloor \sigma_{i,j} \rfloor, \quad \sigma_{i,i} = \sigma_i; \quad \sigma_{i,j} = 0$ para $i \neq j$.

$\boxed{A^+ = V\,\Sigma^+\,U^H}$ es la **Pseudo Inversa de A**

donde $\Sigma^+ = \left(\Sigma^+_{i,j}\right) \quad p \times q \,/\, \Sigma^+_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1/\sigma_i & i = j \end{cases}$

con $\sigma_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k \quad ; \quad \sigma_i = 0, \quad k+1 \leq i \leq min\{p,q\}$

Ejemplo (cont) $T : \Re^2 \rightarrow \Re^3 \quad / \quad T\mathbf{v} = A_T.\mathbf{v}$

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow r_1 \\ \leftarrow r_2 \\ \leftarrow r_3 \end{array}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.1667 & -0.1667 \\ 0 & 0.2887 & -0.2887 \end{bmatrix}$$

PseudoInversa

$$A^+ A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = A_T\ A^+ = \begin{bmatrix} 0.67 & -0.33 & -0.33 \\ -0.33 & 0.67 & -0.33 \\ -0.33 & -0.33 & 0.67 \end{bmatrix}$$

P actúa como una “identidad”en parte del espacio:

$$A^+ P = \begin{bmatrix} 0.33 & -0.1667 & -0.1667 \\ 0 & 0.2887 & -0.2887 \end{bmatrix} = A^+$$

$$P\ A_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1.7321 \\ -1 & -1.7321 \end{bmatrix} = A_T$$

Bases y Marcos - Introducción

Toda transformación lineal **T** es un "cambio de base".

¿ Cómo elegir una "buena" base en el espacio de representación?.

¿ Qué es una base?.

Una base es una sucesión de vectores $\{v_1, v_2, \ldots\}$ o de funciones $\{e_1, e_2, \ldots\}$ con la propiedad de **representación única.**

Bases

Todo vector *v* (o función *f(t)*) puede representarse de manera **única** (una y sólo una) como

$$v = \sum b_i \, v_i \quad \text{ó} \quad f(t) = \sum b_i e_i(t) \, .$$

Para **cada** vector existe una **única** representación.

- El vector nulo sólo puede representarse con $b_i = 0 \ \forall$ i.
- Los elementos de la base son linealmente independientes.

Propiedades de las Bases

- Independencia Lineal (I.L.)
- Completitud

- Si se agregan vectores, se pierde la independencia lineal.
- Si se sacan vectores, se pierde la completitud.

Bases en espacios de Hilbert

H espacio de Hilbert de dim. infinita

$\{e_n\}_{n\in N}$ es una familia ortogonal en H $\Leftrightarrow < e_n, e_p >= 0, \forall n \neq p$

$\{e_n\}_{n\in N}$ es **base ortogonal sii**

$i)\quad \{e_n\}$ es ortogonal

$ii)\ \forall f \in H, \exists \{\lambda[n]\}\ /\ \lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{N} \lambda[n]\, e_n \right\| = 0$

$\lambda[n] = \dfrac{< f, e_n >}{\|e_n\|^2}$ y **se escribe**: $f = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{< f, e_n >}{\|e_n\|^2} e_n$

Notación!!!

Base ortonormal

$\{e_n\}$ es $\boxed{\text{ortonormal}}$ sii es ortogonal y $\|e_n\| = 1$

- Si $\{e_n\}$ es ortonormal, es linealmente independiente (l.i.).

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \langle g, e_n \rangle^*$$ Ec. de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$$ Fórmula de Plancherel

Un **espacio** de Hilbert es **separable sii** que admite una base ortonormal

$L^2(R)$ y $l^2(Z)$ son espacios separables

H se dice **separable**, si H tiene un subconjunto B numerable, denso en H

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 26

Bases de Riesz

Debilitando la condición de ortogonalidad en H (Hilbert)

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 27

Base ortonormal

H: espacio de Hilbert

$\{e_n\}$ es ortonormal sii es ortogonal y $\|e_n\| = 1$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$$

Fórmula de Plancherel

Siendo ahora $\lambda[n] = \dfrac{< f, e_n >}{\|e_n\|^2} =< f, e_n >$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda[n]|^2$$

Fórmula de Plancherel

Bases de Riesz (def.)

Debilitando la condición de ortogonalidad en H (Hilbert)

$\{e_n\}_{n \in N}$ **Es una Base de Riesz o Base Incondicional**

Si satisface:

i) Es linealmente independiente

ii) $\forall\ f \in H, \exists \{\lambda[n]\}_{n \in N}$ tal que $f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda[n]\, e_n$.

$$\frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \sum_n |\lambda[n]|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2$$

Debilita Plancherel

¿Marcos o Bases de Riesz?

Un marco $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ tiene **una** de las prop. de las bases de Riesz

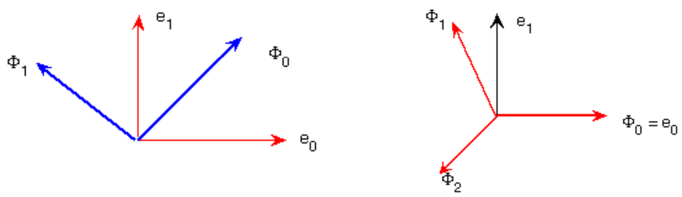
- ➢ $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ genera el espacio H:

$$\forall\ f\in H,\quad Uf[n]=\sum\left\langle f,\phi_n\right\rangle \phi_n$$

- ➢ Pero no necesariamente son L.I.

Un marco es asociado con sobre-muestreo o redundancia

Base vs marco



Bases ortogonales

Marco en R^2

Ejemplo

$$T:\Re^2 \to \Re^3 \quad / \quad T\mathbf{v} = \mathbf{A}_T.\mathbf{v}$$

$$\mathbf{A}_T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow r_1 \\ \leftarrow r_2 \\ \leftarrow r_3 \end{array}$$

- Los vectores $\{r_1, r_2, r_3\}$ **no** son L.I. pero generan R^2.

$$v \in \Re^2, \quad v = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle r_i, v\rangle}{6} r_i$$

$$\sum_{i=1}^{3} \left|\langle v, r_i\rangle\right|^2 \boxed{=} 6\,\|v\|^2 \longrightarrow$$

Es un marco justo

$\{r_1, r_2, r_3\}$ es un **marco** de R^2.

Ejemplo

$$T:\Re^2 \to \Re^3 \quad / \quad T\mathbf{v} = A_T.\mathbf{v}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \mathbf{r}_1 \\ \leftarrow \mathbf{r}_2 \\ \leftarrow \mathbf{r}_3 \end{array}$$

Pseudo-inversa

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.1667 & -0.1667 \\ 0 & 0.2887 & -0.2887 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v}_1^+ & \mathbf{v}_2^+ & \mathbf{v}_3^+ \end{array}$$

$$\mathbf{v} \in \Re^2, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} b_i\, \mathbf{v}_i^+ = \sum_{i=1}^{3} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{v}\rangle\, \mathbf{v}_i^+ = \sum_{i=1}^{3} \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{v}\rangle \frac{1}{6}\mathbf{r}_i$$

- Podemos recuperar v a partir de las columnas $\mathbf{v}^+_i$

- el n- ésimo vector de **análisis** marco es $\mathbf{r}_n$.
- la n-ésima coordenada es $< \mathbf{r}_n, \mathbf{v} >$
- el n-ésimo vector de **síntesis** marco es $\boldsymbol{v}^+_n$

¿Dimensión Infinita?

Definición: Un marco es un conjunto de vectores $\{r_n\}$ tq.

$$A\|v\|^2 \le \sum |\langle r_n, v\rangle|^2 \le B\|v\|^2 \qquad \forall v \in H$$

0<A, B son **cotas del marco**

Si A = B , el marco se llama **justo**.

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 34

¿ Cómo recuperar v de $\{< r_n, v >\}_{n\in\Gamma}$?

- Las cotas del marco hacen a $T^* T$ y a $(T^* T)^{-1}$ operadores acotados.

$$\langle v, T^*Tv\rangle = \langle Tv, Tv\rangle = \sum |\langle r_n, v\rangle|^2$$

$$A\|v\|^2 \le \langle v, T^*Tv\rangle \le B\|v\|^2 \qquad \forall v \in H$$

T^*T está acotado por B y

su inversa está acotada por 1/A

B/A es la tasa del marco

A y B aseguran que v pueda ser **recuperado** de manera **estable.**

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 35

Marcos

Teoría de Marcos analiza ⇨ completidud ⇨ estabilidad ⇨ redundancia de representaciones lineales de señales discretas

f señal

Marco: $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ caracteriza f ➔ $\{\langle f,\phi_n\rangle\}_{n\in\Gamma}$

TM desarrollada por Duffin y Schaeffer (1952) para reconstruir $\{f(t_n)\}$ con $\{t_n\}$ un muestreo irregular.

Ole Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, 2002

Ole Christensen, *Frames and Bases: An Introductory Course in mathematics and engineering*, Birkhäuser, 2008

Teoría de Marcos (TM)

H espacio de Hilbert; $f\in$ **H**

$\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$, Γ finito o infinito, $\{\langle f,\phi_n\rangle\}_{n\in\Gamma}$

Definición: La sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ se dice un **marco** de **H** si existen dos constantes A>0 y B>0, tales que para cualquier $f\in$ **H**

$$A\,\|f\|^2 \le \sum_{n\in\Gamma} \left|\langle f,\phi_n\rangle\right|^2 \le B\,\|f\|^2 .$$

Cuando A=B, se dice que el **marco** es **justo** (tight frame).

Operador *Marco*

U: operador $/ \forall\ f \in \mathbf{H}, \forall\ n \in \Gamma \quad , \quad Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle.$

Si la condición de marco (1) se satisface,

$$A\,\|f\|^2 \leq \sum_{n\in\Gamma} \left|\langle f, \phi_n \rangle\right|^2 \leq B\,\|f\|^2. \qquad (1)$$

U se dice un **Operador Marco**.

Marcos Propiedades (I)

$$A\,\|f\|^2 \leq \sum_{n\in\Gamma} \left|\langle f, \phi_n \rangle\right|^2 \leq B\,\|f\|^2. \qquad (1)$$

Veremos que:

- (1) da condición necesaria y suficiente para garantizar que U sea inversible, con inversa acotada.
- Un marco define una representación **completa** y **estable** de la señal, que puede ser también **redundante**.
- Si $\|\phi_n\| = 1$ la redundancia se mide con A y B

Marcos – Propiedades (cont)

- Si $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ son linealmente independientes, $A \le 1 \le B$.

$$A\left\|\phi_m\right\|^2 \le \sum_{n\in\Gamma}\left|\langle \phi_m,\phi_n\rangle\right|^2 \le B\left\|\phi_m\right\|^2.$$

$$A\left\|\phi_m\right\|^2 \le \left|\langle \phi_m,\phi_m\rangle\right|^2 \le B\left\|\phi_m\right\|^2.$$

- Un marco es una base ortogonal si y sólo si $A = B = 1$.

$$A\left\|f\right\|^2 \le \sum_{n\in\Gamma}\left|\langle f,\phi_n\rangle\right|^2 \le B\left\|f\right\|^2.$$

$$\sum_{n\in\Gamma}\left|\langle f,\phi_n\rangle\right|^2 = \left\|f\right\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad A = B = 1$$

Si $A>1$, entonces el marco es redundante y A se interpreta como el menor factor de redundancia.

Ejemplo 1

$\{e_1,e_2\}$ una base ortonormal de un espacio bidimensional ("plano") H.

$$\phi_1 = e_1 \quad , \quad \phi_2 = -\frac{e_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 \quad , \quad \phi_3 = -\frac{e_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$$

tienen iguales ángulos entre ellos = $2\pi/3$

$$f \in \mathbf{H}\,, \quad \sum_{n=1}^{3}\left|\langle f,\phi_n\rangle\right|^2 = \frac{3}{2}\left\|f\right\|^2$$

ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 definen un marco justo con $A=B=3/2$.

La cota del marco 3/2 define su redundancia en **H** / dim(**H**)=2.

Ejemplo 2

Para $0 \leq k \leq K$, $\{e_{k,n}\}_{n\in Z}$ bases ortogonormales de **H**

$\{e_{k,n}\}_{n\in Z,\, 0 \leq k \leq K}$ es una marco justo de **H** con A=B= K

$$f \in \mathbf{H}, \quad \sum_{n\in Z} \left| \langle f, e_{k,n} \rangle \right|^2 = \|f\|^2$$

$$\sum_{k=0}^{K} \sum_{n\in Z} \left| \langle f, e_{k,n} \rangle \right|^2 = K \|f\|^2$$

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 42

Ejemplo 3

Un conjunto finito de N vectores $\{\phi_n\}_{1 \leq n \leq N}$ es siempre un marco de

$V = gen\{\{\phi_n\}_{1 \leq n \leq N}\}$

Ejercicio

Cuando $N \to \infty$, A y B pueden ir respectivamente a 0 y a $+\infty$.

En espacios de dimensión infinita,

una familia de vectores puede ser *completa*, pero no dar una representación *estable* de la señal

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 43

Muestreo Regular

$$\mathbf{U}_T = \left\{ f \in L^2(\Re) \quad / \quad \sup[\hat{f}] \subset [-\pi/T, \pi/T] \right\}$$

$$h_T(t) = \sin(\pi t/T)/(\pi t/T)$$

Para $t_n = nT$ (muestreo uniforme),

$$\{T^{1/2}\, h_T(t\text{-}nT)\}_{n\in Z}$$

es base ortonormal de $\mathbf{U}_T$

Teorema de muestreo de Shannon ⇨ reconstrucción de f

Muestreo Irregular

Para muestreo NO uniforme (Grochening, 1992)

Si $\lim_{t\to+\infty} t_n = +\infty$ y $\lim_{t\to-\infty} t_n = -\infty$

y $\delta = \sup_{n\in Z} |t_{n+1} - t_n| < T$: Máxima distancia muestral

$$\Rightarrow \left\{ \sqrt{\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{2\,T}}\; h_T\,(t - t_n) \right\}_{n\in Z}$$

es un marco con:

$$A \geq (1 - \delta/T)^2 \quad \text{y} \quad B \leq (1 + \delta/T)^2.$$

$\sqrt{t_{n+1} - t_{n-1}/2}$ **Factor de amplitud,** compensa la densidad no-uniforme de las muestras:

atenúa la amplitud de los vectores cuando hay una alta densidad de muestras.

Reconstrucción: inversión del Op. Marco: $Uf[n] = \langle f(t), h_T(t - t_n) \rangle$

Pseudo Inversa

La **reconstrucción** de f a partir de los coeficientes marco $Uf[n]$ se calcula con una **pseudo- inversa**.

Es un operador acotado que se expresa con el **marco dual**.

$$l^2(\Gamma) = \left\{ x \quad : \quad \|x\|^2 = \sum_{n\in\Gamma} |x(n)|^2 < +\infty \right\}$$

$$U : \mathbf{H} \to l^2(\Gamma)$$

$$\mathbf{Im}U = \mathrm{Im}\{ Uf , \quad f \in \mathbf{H} \}$$

Pseudo Inversa (Teorema)

Teorema: Si $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ es un marco cuyos vectores son linealmente dependientes, entonces:

- **Im**U está estrictamente contenida en $l^2(\Gamma)$
- U admite un número infinito de inversas izquierdas $\overline{U}^{-1}$

$$\forall f \in \mathbf{H} \quad , \quad \overline{U}^{-1} U f = f .$$

Teorema (dem 1.)

H) $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$: marco de H, vectores l.d

Tesis: 1) **Im**U$\subset l^2$ *(Γ) y son distintos*

2) $\exists n$ infinitas $U^{-1} / \forall f \in \mathbf{H}, \overline{U}^{-1} U\, f = f$.

Dem 1:

$$U : \mathbf{H} \to l^2(\Gamma) / Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle$$

$$A\|f\|^2 \le \sum_{n\in\Gamma} \left|\langle f, \phi_n\rangle\right|^2 \le B\|f\|^2. \quad \Rightarrow \quad \|Uf\|^2 = \sum_{n\in\Gamma} \left|\langle f, \phi_n\rangle\right|^2 \le B\|f\|^2.$$

$$f \in H \subset L^2 \Rightarrow \|Uf\|^2 < +\infty$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(U) \subset l^2(\Gamma)}$$

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 49

Teorema (dem.)

H) $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$: marco de H, vectores l.d

Tesis: 1) **Im**U$\subset l^2$ *(Γ)* *y es distinto de* l^2 *(Γ)*

2) $\exists n$ infinitas $U^{-1} / \forall f \in \mathbf{H}, \overline{U}^{-1} U\, f = f$.

Dem. 1 (cont):

$$\{\phi_n\}_{n\in\Gamma} \text{ es ld } \Rightarrow \quad \exists\, x \ne 0, \boxed{x \in l^2(\Gamma)} / \quad \sum_{n\in\Gamma} x[n]\,\phi_n = 0$$

$$\forall\, f \in \mathbf{H}, \quad \sum_{n\in\Gamma} x[n] \langle f, \phi_n \rangle = \sum_{n\in\Gamma} x[n]\, Uf[n] = 0$$

$\Rightarrow$ **Im**U es ortogonal a x $\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{Im}U \ne l^2\,(\Gamma)}$.

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 50

Teorema (dem. 2)

$$U : \mathbf{H} \rightarrow l^2(\Gamma) / Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle$$

2) ¿ U admite un número infinito de inversas izquierdas $\overline{U}^{-1}$ /
$\forall f \in \mathbf{H} \quad , \quad \overline{U}^{-1} U \ f = f \qquad ?$

U es marco $\Rightarrow$ U es inyectivo : (U$f = 0 \Rightarrow f = 0$)

$U : H \rightarrow \mathbf{Im}U$ es inversible

Sea $\mathrm{Im}\ U^{\perp}$ / $\mathrm{Im}\ U^{\perp} \oplus \mathrm{Im}\ U = l^2(\Gamma)$

el **Complemento Ortogonal** de **Im**U

Si $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ es l.d. $\Rightarrow$ $\mathbf{Im}U^{\perp} \neq \{0\}$

$\overline{U}^{-1} : \mathbf{Im}U^{\perp} \rightarrow H$ puede ser un operador lineal arbitrario.

La pseudo inversa de U

- Se define como la inversa izquierda de U que satisface:

$$\tilde{U}^{-1} : l^2(\Gamma) \rightarrow H /$$
$$i) \quad \tilde{U}^{-1}Uf = f, \forall f \in H$$
$$ii) \quad \tilde{U}^{-1}x = 0, \quad \forall x \in (\mathrm{Im}U)^{\perp}$$

Si dim(H) es infinito y U es inyectivo, entonces su pseudoinversa no es necesariamente acotada

De la Pseudo Inversa

- Cuanto más redundante sea el marco $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$, mayor será el complemento ortogonal $\mathbf{Im}U^{\perp}$.
- Esto induce inestabilidades numéricas al tratar de reconstruir f a partir de Uf.

Notación:

El **adjunto del operador U** es U* / $\langle Uf, x\rangle = \langle f, U^* x\rangle$

$$\left\|\tilde{U}^{-1}\right\|_S = \sup_{x \in l^2(\Gamma)-\{0\}} \frac{\left\|\tilde{U}^{-1}x\right\|}{\|x\|}.$$

Norma del Supremo

Teorema (de la Pseudo-Inversa)

La pseudo-inversa satisface $\tilde{U}^{-1} = (U^* U)^{-1} U^*$

Es la inversa izquierda que tiene menor norma supremo.

Si U es un operador marco con cotas A y B entonces

$$\left\|\tilde{U}^{-1}\right\|_S \leq \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Entonces:
- un operador marco tiene siempre pseudo-inversa
- la pseudo-inversa está siempre acotada.

Operador Autoadjunto

$T\!:\!H \to H$ autoadjunto $\Leftrightarrow$

$$\langle Tf\,,f\rangle = \langle f\,,T^{*}f\rangle \quad \text{y} \quad T = T^{*}$$

Lema:

Si L es un operador auto-adjunto tal que existen A>0 y B que satisfacen

$$\forall\ f \in H \quad , \quad A\,\|f\|^{2} \le \langle Lf\,,f\rangle \le B\,\|f\|^{2}$$

entonces L es inversible y

$$\forall\ f \in H \quad , \quad \frac{1}{B}\|f\|^{2} \le \langle L^{-1}f\,,f\rangle \le \frac{1}{A}\|f\|^{2}$$

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 55

Comparación

	Ortogonal	l..i.	Form. de Plancherel	Generador
Base Ortonormal	SI	Si	Si	Si
Base de Riesz	No neces.	Si	No	Si
Marco	No neces.	No neces.	No	Si

15/05/2009 APAS'2009-Clase 5 56