




ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO AVANZADO DE SEÑALES

Clase 4

Dra. María Eugenia Torres
Dr. Hugo Leonardo Rufiner
Dr. Diego H. Milone

Universidad Nacional de Entre Ríos
Facultad de Ingeniería
Laboratorio de Señales y
Dinámicas no Lineales

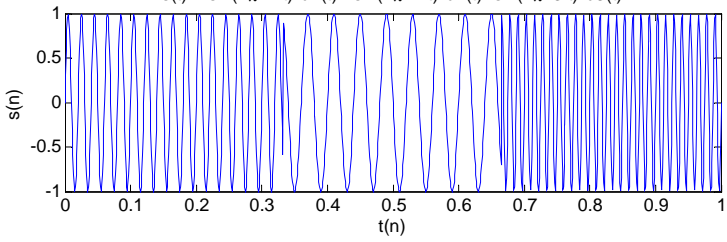
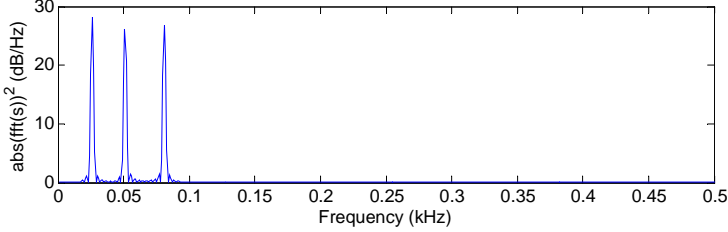
Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ciencias Hídricas
SINC(i)

08/05/2009APAS'20091

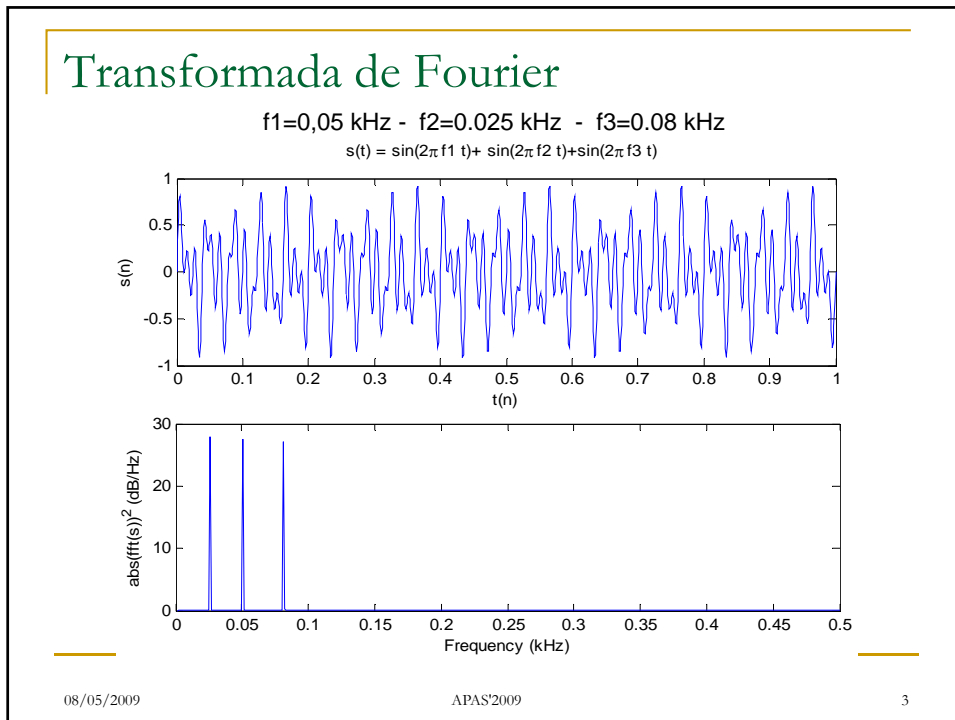
Transformada de Fourier

$f_1=0,05 \text{ kHz} - f_2=0,025 \text{ kHz} - f_3=0,08 \text{ kHz}$

$s(t) = \sin(2\pi f_1 t) * u_1(t) + \sin(2\pi f_2 t) * u_2(t) + \sin(2\pi f_3 t) * u_3(t)$

08/05/2009APAS'20092



Transformada de Fourier

$$H(t) = \delta_0(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}(H) = \mathcal{H}(\omega) = \dots$$

$$\mathcal{H}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega \cdot 0} = 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Una función cuya información está totalmente **concentrada** en un punto en el **dominio temporal**

\mathcal{F}
 \longrightarrow

Una función cuya información se encuentra **distribuida** en el **dominio frecuencial**.

08/05/2009
APAS'2009
4

La Transformada de Fourier *Propiedades: Principio de Incertidumbre*

¿ Es posible construir una función f tal que:

→ Su energía esté bien localizada en tiempo?

→ Su transformada de Fourier tenga energía concentrada en un pequeño entorno de frecuencia?

08/05/2009

APAS'2009

5

La Transformada de Fourier *Propiedades: Principio de Incertidumbre*

¿ Una señal no nula puede tener
soporte finito
en tiempo y en frecuencia?

➤ $\delta(t - u)$ tiene soporte restringido a $t=u$

➤ $\hat{\delta}(\omega) = e^{-in\omega}$ tiene energía distribuida uniformemente en todas las frecuencias

08/05/2009

APAS'2009

6

La Transformada de Fourier
Propiedades: Principio de Incertidumbre

Si $\exists n$ constantes K y $\varepsilon > 0$ / $|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{K}{1+|\omega|^{p+1+\varepsilon}}$

Entonces $f \in C^p$

- $|\hat{f}(\omega)|$ tiene decaimiento rápido a altas frecuencias, sólo si f tiene variaciones regulares en el tiempo.
- La energía en el dominio temporal debe estar desparramada en un tiempo “largo”.

La Transformada de Fourier
Propiedades: Principio de Incertidumbre

Solución?

- ¿ Reducir la dispersión temporal de f ?

Cómo?

- ¿ Con un cambio de escala de f ?

Si $f_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right)$, con $s < 1$, entonces $\|f_s\|^2 = \|f\|^2$

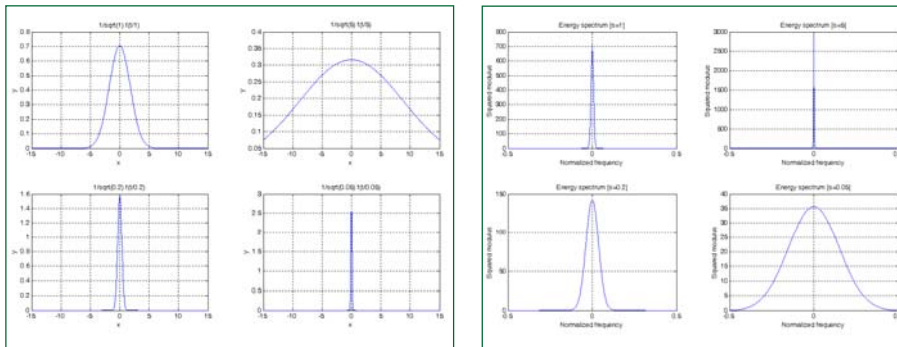
- pero $\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{s} \hat{f}(s\omega)$ es dilatada en $1/s$

Dilatación en tiempo vs. frecuencia

s= 1, 5, 0.2, 0.05

$$f_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right)$$

$$\hat{f}_s(\omega)$$



08/05/2009

APAS'2009

9

La Transformada de Fourier Propiedades: Principio de Incertidumbre

- ❖ Las concentraciones de energía en tiempo y frecuencia están restringidas por el Principio de Incertidumbre de Heisenberg

Interpretación en Mecánica Cuántica:

El estado de una partícula unidimensional es descrito por una función de onda $f \in L^2(\mathfrak{R})$

08/05/2009

APAS'2009

10

La Transformada de Fourier
Propiedades: Principio de Incertidumbre

$f \in L^2(\mathfrak{R})$

➤ La densidad de probabilidad de que una partícula esté localizada en t es

$$\frac{1}{\|f\|^2} |f(t)|^2$$

➤ La densidad de probabilidad de que su momentum sea igual a ω es

$$\frac{1}{2\pi\|f\|^2} |\hat{f}(\omega)|^2$$

➤ Localización promedio: $u = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathfrak{R}} t |f(t)|^2 dt$

➤ Varianzas: $\sigma_u^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathfrak{R}} (t-u)^2 |f(t)|^2 dt$

➤ Momentum promedio: $\xi = \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{\mathfrak{R}} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$

➤ Varianzas: $\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{\mathfrak{R}} (\omega-\xi)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$

08/05/2009 APAS'2009 11

La Transformada de Fourier
Propiedades: Principio de Incertidumbre

Teorema (de Incertidumbre de Heisenberg):

La varianza temporal y frecuencial de $f \in L^2(\mathfrak{R})$ satisfacen

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}$$

La igualdad es válida si y sólo si existen $(u, \xi, a, b) \in \mathfrak{R}^2 \times C^2$ tales que

$$f(t) = a \exp[i\xi t - b(t-u)^2]$$

Gabor Chirps

08/05/2009 APAS'2009 12

La Transformada de Fourier Propiedades: Principio de Incertidumbre

Soporte compacto?

Teorema

Si $f \neq 0$, tiene soporte compacto, entonces $\hat{f}(\omega)$ no puede ser nula en todo un intervalo.

Recíprocamente, si $\hat{f}(\omega)$ tiene soporte compacto, entonces $f(t)$ no puede ser nula en todo un intervalo.

08/05/2009

APAS'2009

13

Contenidos

- **Introducción**
Elementos de Matemáticas avanzadas. Operadores lineales. Proyecciones. Espacios vectoriales. Filtros lineales invariantes en el tiempo. Integrales de Fourier en L^1 y en L^2 . Propiedades. Filtros lineales discretos invariantes en el tiempo. Señales finitas.
- **Análisis tiempo-frecuencia**
La transformada Fourier por ventanas. La transformada ondita. Frecuencia instantánea. Energía tiempo-frecuencia instantánea.
- **Marcos**
Teoría de Marcos. Marcos en Fourier y en onditas. Invariancia ante traslación. Transformada Ondita Diádica.
- **Bases Ondita.**
Bases onditas ortogonales. Aproximaciones Multirresolución. Funciones escala. Filtros espejo conjugados. Clases de bases ondita. Onditas y bancos de filtros. Bases biortogonales.
- **Aplicaciones.**

08/05/2009

APAS'2009

14

Átomos tiempo-frecuencia/tiempo-escala

Una transformación lineal tiempo-frecuencia,

correlaciona $f(t)$ con una familia de ondas concentradas en tiempo y en frecuencia

$$\{\phi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset L^2(\mathfrak{R})$$

$$\|\phi_\gamma\|_2 = 1$$

↑
Átomos tiempo-frecuencia

$$Tf(\gamma) = \int_{\mathfrak{R}} f(t) \cdot \phi_\gamma^*(t) \cdot dt = \langle f, \phi_\gamma \rangle$$

08/05/2009

APAS'2009

15

Átomos tiempo-frecuencia/tiempo-escala

$$\{\phi_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset L^2(\mathfrak{R}) \quad \|\phi_\gamma\|_2 = 1$$

Por Parseval:

$$Tf(\gamma) = \int_{\mathfrak{R}} f(t) \cdot \phi_\gamma^*(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{R}} \hat{f}(\omega) \cdot \hat{\phi}_\gamma^*(\omega) \cdot d\omega$$

- Si los átomos son “casi” cero fuera de un cierto entorno de un valor temporal u , entonces el producto interno temporal depende de
- Si la transformada de Fourier de los átomos son “casi” cero fuera de un cierto entorno de un valor frecuencial ξ , entonces el producto interno frecuencial depende de

08/05/2009

APAS'2009

16

Átomos tiempo-frecuencia/escala-ejemplos

Los átomos de Fourier por ventanas

$$\phi_\gamma(t) = g_{\xi,u}(t) = e^{i\xi t} g(t-u)$$

Modulación en frecuencia
 Traslación temporal

Los átomos ondita o wavelet

$$\phi_\gamma(t) = \psi_{s,u}(t) = \psi_s(t-u) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

Dilatación

08/05/2009

APAS'2009

17

Recordando que:

$$\phi(t-u) \xrightarrow{\text{Fourier}} e^{-i u \omega} \hat{f}(\omega)$$

$$e^{i \xi t} \phi(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \hat{f}(\omega - \xi)$$

$$\phi(t/s) \xrightarrow{\text{Fourier}} |s| \hat{f}(s \omega)$$

08/05/2009

APAS'2009

18

WFT y WT

Los núcleos son átomos Fourier por ventanas o átomos ondita:

$$Tf(\gamma) = \int_{\mathfrak{R}} f(t) \cdot \phi_{\gamma}^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{R}} \hat{f}(\omega) \cdot \hat{\phi}_{\gamma}^*(\omega) d\omega$$

- Tienen su energía bien localizada en el tiempo

Sus transformadas de Fourier

- Tienen su energía bien localizada en bandas de frecuencia

Cajas de Heisenberg

Werner Karl Heisenberg (1901- 1976). Físico alemán
[Premio Nobel de Física 1932](#)
 fundamentos de la mecánica cuántica matricial.

La localización tiempo frecuencia /escala de

$$Tf(\gamma) = \int_{\mathfrak{R}} f(t) \cdot \phi_{\gamma}^*(t) dt = \langle f, \phi_{\gamma} \rangle$$

depende de la dispersión temporal y frecuencial/escala del átomo

$$\|\phi_{\gamma}\|_2^2 = \langle \phi_{\gamma}, \phi_{\gamma} \rangle = \int_{\mathfrak{R}} |\phi_{\gamma}(t)|^2 dt = 1$$

Se puede interpretar como una
distribución de probabilidad

Cajas de Heisenberg

$$u_\gamma = \int_{\mathbb{R}} t |\phi_\gamma(t)|^2 dt$$

Centro de masa temporal

$$\sigma_t^2(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} (t - u_\gamma)^2 |\phi_\gamma(t)|^2 dt$$

Dispersión temporal

Plancherel

→

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\phi_\gamma(t)|^2 dt = \|\phi_\gamma\|^2$$

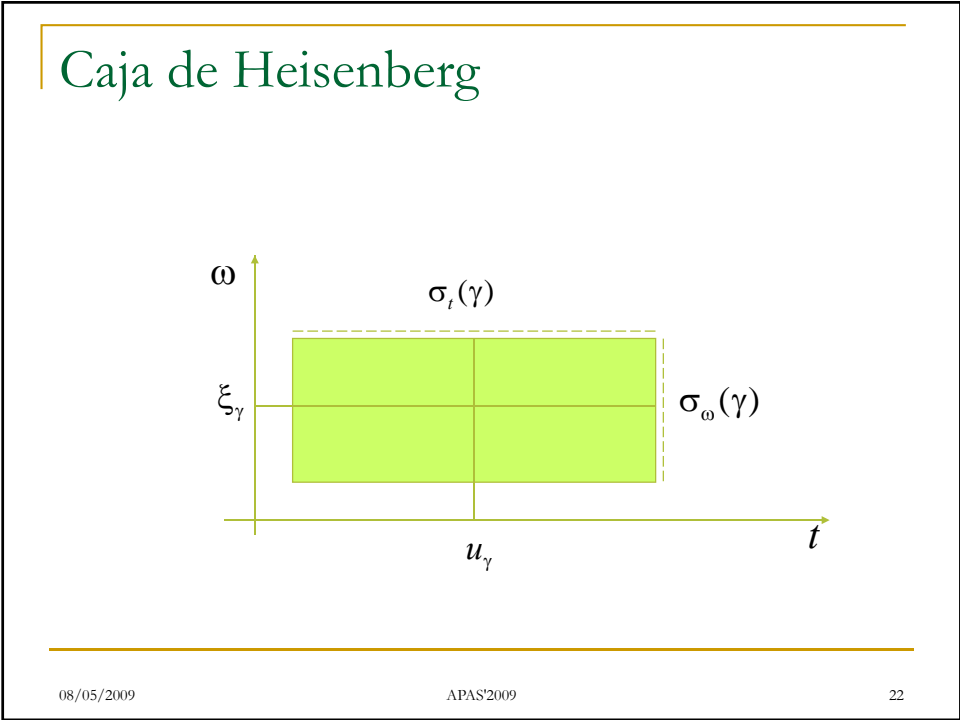
$$\xi_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega$$

Centro de masa
frecuencial/escala

$$\sigma_\omega^2(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\omega - \xi_\gamma)^2 |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega$$

Dispersión
frecuencial/escala

08/05/2009
APAS'2009
21



Transformada de Gabor



Denis Gabor (1900, Budapest - 1979, Londres)
 Físico judío húngaro – Huye de Alemania en 1933.
 Inventor de la **holografía** (1947).
 Premio Nobel de Física en 1947

D. Gabor "Theory of communication", Journal of the Institute of Electrical Engineers, Vol 93-III, pp 429-457, 1946.

1. g : real y simétrica $g(t)=g(-t)$
2. $g_{u,\xi}(t) = e^{i\xi t} g(t-u)$
3. Se la normaliza: $\|g_{u,\xi}\| = 1$

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{\mathfrak{R}} f(t)g(t-u)e^{-i\xi t} dt$$

Transformada de Gabor

$$g(t) = e^{-\pi t^2}$$

$$Sf(u, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathfrak{R}} f(t)e^{-\pi(t-u)^2} e^{-i\xi t} dt$$

T. Gabor es un **caso particular** de la
Short time Fourier transform = Windowed Fourier transform



Señal analítica

$s(t)$ señal real

Señal analítica

Amplitud instantánea

Frecuencia instantánea

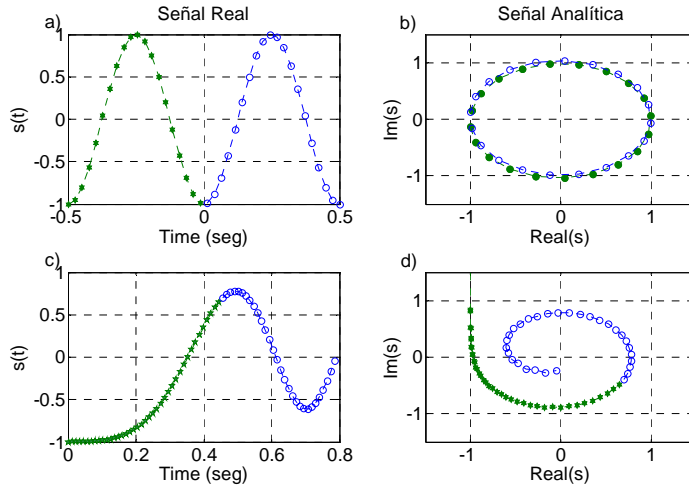
$\longrightarrow a_s(t) = |z_s(t)|$
 $\longrightarrow v_s(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\arg(z_s(t))]$

$$z_s(t) = s(t) + i H\{s(t)\} = s(t) + i \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(u)}{t-u} du$$

H: Transformada de Hilbert de $s(t)$

08/05/2009
APAS'2009
26

Representación de una s. analítica



08/05/2009

APAS'2009

27

Su transformada de Fourier

$$z_s(t) = s(t) + i H\{s(t)\} = s(t) + i \frac{1}{2\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(u)}{t-u} du$$

$$Z_s(\omega) = S(\omega) + i(-i \text{sign}(\omega)) S(\omega) = 2U(\omega)S(\omega)$$

$$U(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{si } \omega < 0 \end{cases}$$

$$f(t) \in C \rightarrow F[f^*(t)] = F[f]^*(-\omega)$$

$$s(t) \in \mathfrak{R} \rightarrow F[s^*(t)] = F[s(t)] = F[s]^*(-\omega) \rightarrow S(-\omega) = S^*(\omega)$$

08/05/2009

APAS'2009

28

Señal Analítica

Definición: Un función $f_a \in L^2(\mathbb{R})$ se dice **analítica** si su transformada de Fourier es nula para frecuencias negativas:
 $\hat{f}_a(\omega) = 0$ si $\omega < 0$

Una función analítica es **compleja** pero esta integralmente **caracterizada por su parte real:**

$$f = \text{Rea}[f_a]$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\hat{f}_a(\omega) + \hat{f}_a^*(-\omega)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}_a(\omega) = \begin{cases} 2\hat{f}(\omega) & \text{si } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (1)$$

La señal analítica $f_a(t)$ asociada a una señal real $f(t)$ es la transf. inv. de Fourier de la (1).

Parte Analítica Discreta

$f[n]$, con $n=1, \dots, N$ una señal discreta real

$$\hat{f}_a(k) = \begin{cases} \hat{f}(k) & \text{si } k = 0, N/2 \\ 2\hat{f}(k) & \text{si } 0 < k < N/2 \\ 0 & N/2 < k < N \text{ y para } k < 0 \end{cases}$$

$$f_a(n) = F^{-1}[\hat{f}_a(k)]$$

Parte Analítica: Ejemplo

$$f(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$= \frac{a}{2} (\exp[i(\omega_0 t + \phi)] + \exp[-i(\omega_0 t + \phi)])$$

$$\hat{f}(\omega) = \pi a [\exp(i\phi) \delta(\omega - \omega_0) + \exp(-i\phi) \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\hat{f}_a(\omega) = 2\pi a \exp(i\phi) \delta(\omega - \omega_0)$$

$$f_a(t) = a \exp[i(\omega_0 t + \phi)]$$

Aplicaciones

- Comunicación de Señales → Modulación en frecuencia
- Modelos de sonido Aditivo → música
 - ↳ voz hablada → formantes

Transformada Ondita Continua

$$CWT^\psi : L^2(\mathfrak{R}) \rightarrow L^2(\mathfrak{R}^2)$$

$$f \rightarrow CWT^\psi(f) = Wf$$

$$\psi \in L^2(\mathfrak{R}) / \int_{\mathfrak{R}} \psi(t) dt = 0, \|\psi\| = 1 \text{ y centrada en } t=0$$

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

$$W_\psi f(u,s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

08/05/2009

APAS'2009

33

ψ Ondita Analítica

¿ Para qué usamos una ondita analítica?

Analizar la evolución temporal de los tonos de frecuencia

¿Porqué?

Separa la información de la fase y de la amplitud de la señal compleja.

08/05/2009

APAS'2009

34

Transformada Ondita Analítica

$$CWT^\psi : L^2(\mathfrak{R}) \rightarrow L^2(\mathfrak{R}^2)$$

$$f \rightarrow CWT^\psi(f) = W_\psi f$$

Analítica $\psi \in L^2(\mathfrak{R}) / \int_{\mathfrak{R}} \psi(t) dt = 0, \|\psi\| = 1$ y centrada en $t=0$

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \rightarrow \text{Centrada en } t=u$$

$$W_\psi f(u,s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

08/05/2009

APAS'2009

35

Dispersión temporal del átomo ondita

Centrada en $t=u$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-u)^2 |\psi_{u,s}^*(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (t-u)^2 \left| \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) \right|^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (sv)^2 \frac{1}{|s|} |\psi(v)|^2 s dv$$

$$= s^2 \sigma_t^2$$

08/05/2009

APAS'2009

36

Localización frecuencial del átomo ondita

ψ analítica $\Rightarrow \hat{\psi}(\omega) = 0$ si $\omega < 0$

¿ Frecuencia central de $\hat{\psi}$?

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega$$

¿ Frecuencia central $\omega_{u,s}$ de $\psi_{u,s}$?

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{u,s}(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} \psi_{u,s}(t) \exp[-i\omega t] dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \exp[-i\omega t] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\mathfrak{R}} \psi(v) \exp[-i\omega(sv+u)] s dv = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sqrt{s} \exp[-i\omega u] \int_{\mathfrak{R}} \psi(v) \exp[-i(\omega s)v] dv \end{aligned}$$

$$v = \frac{t-u}{s}$$

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = \sqrt{s} \exp[-i\omega u] \hat{\psi}(s\omega)$$

η

$$\omega_{u,s} = \eta/s$$

08/05/2009

APAS'2009

37

Dispersión frecuencial del átomo ondita

¿ Dispersión en Frecuencia de $\psi_{u,s}$?

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{\psi}_{u,s}}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{R}} (\omega - \omega_{u,s})^2 |\hat{\psi}_{u,s}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{R}} \left(\omega - \frac{\eta}{s}\right)^2 \left|\sqrt{s} \exp[-i\omega u] \hat{\psi}(s\omega)\right|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} s \int_0^{+\infty} \left(\omega - \frac{\eta}{s}\right)^2 |\hat{\psi}(s\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{v-\eta}{s}\right)^2 |\hat{\psi}(v)|^2 dv \end{aligned}$$

$$v = s\omega$$

$$\sigma_{\hat{\psi}_{u,s}}^2 = \frac{\sigma_{\omega}^2}{s^2}$$

$$\sigma_{\omega}^2 = \int_0^{+\infty} (\gamma - \eta)^2 |\hat{\psi}(\gamma)|^2 d\gamma$$

08/05/2009

APAS'2009

38

Resolución tiempo-frecuencia del átomo on-dita

$\psi_{u,s}$ centrada en u

Dispersión temporal

$\sigma_{\psi_{u,s}}^2 = s^2 \sigma_{\psi}^2$

Frecuencia central $\omega_{u,s}$ de $\psi_{u,s}$

$\omega_{u,s} = \eta/s$

Dispersión en Frecuencia de $\psi_{u,s}$

$\sigma_{\hat{\psi}_{u,s}}^2 = \frac{\sigma_{\omega}^2}{s^2}$

¿Area?

08/05/2009
APAS'2009
39

Escalograma

$$P_W f(u, \xi) = |W_{\psi} f(u, s)|^2 = \left| W_{\psi} f\left(u, \frac{\eta}{\xi}\right) \right|^2$$

$P_W f$ densidad de energía local
 en la caja de Heisemberg de cada on-dita $\psi_{u,s}$
 centrada en $(u, \xi) = (u, \eta/s)$

Frecuencia central
 $\omega_{u,s}$ de $\psi_{u,s}$

$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega$

Frecuencia central de $\hat{\psi}$

08/05/2009
APAS'2009
40

Completitud de la Ondita Analítica

Teorema: Sea

$$f \in L^2(\mathcal{R}),$$

$$W_\psi f(u, s) = \frac{1}{2} W_\psi f_a(u, s).$$

Si $C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{-1} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < +\infty$ y f es real, entonces⁰

$$f(t) = \frac{2}{C_\psi} \operatorname{Re} \left[\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(u, s) \psi_s(t-u) du \frac{ds}{s^2} \right],$$

Inversibilidad

$$\|f(t)\|^2 = \frac{2}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_\psi f(u, s)|^2 du \frac{ds}{s^2}.$$

Conserv. Energía

$$\xi = 1/s \Rightarrow \|f(t)\|^2 = \frac{2}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_W f(u, \xi) du d\xi.$$

Densidad de energía local
 tiempo-frecuencia

08/05/2009

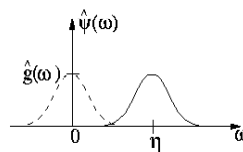
APAS'2009

41

Ventanas Ondita Modulada

Una ondita analítica puede construirse con una modulación en frecuencia de una **ventana real y simétrica** g

$$\psi(t) = g(t) \exp(i\eta t) \Rightarrow \hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \eta)$$



Si $\hat{g}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \eta \Rightarrow \hat{\psi}(\omega) = 0$ si $\omega < 0 \therefore \psi$ es analítica

g real y par $\Rightarrow \hat{g}$ real y simétrica $\Rightarrow \hat{\psi}$ tiene frec. central η y

$$|\hat{\psi}(\eta)| = \sup_{\omega \in \mathcal{R}} |\hat{\psi}(\omega)| = \hat{g}(0)$$

08/05/2009

APAS'2009

42

Las Onditas de Gabor

$$\psi(t) = g(t) \exp[i \eta t] \quad \text{con} \quad g(t) = \frac{1}{(\sigma^2 \pi)^{1/4}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)$$

¿ Son analíticas?

$$\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \eta) \quad \hat{g}(\omega) = (4\sigma^2 \pi)^{1/4} \exp\left(\frac{-\sigma^2 \omega^2}{2}\right)$$

Si $\sigma^2 \omega^2 \gg 1$ entonces $\hat{g}(\omega) \approx 0 \rightarrow$ y $\hat{\psi}(\omega) \approx 0$ para $|\omega| > \eta$

$$\text{Si } |\omega| > \eta, \quad \frac{\sigma^2 \omega^2}{2} > \frac{\sigma^2 \eta^2}{2} \gg \frac{1}{2}$$

ψ se dice *aproximadamente analítica*

Ejemplo 1: Onda Sinusoidal – Ondita Gaussiana

$$f(t) = a \exp(i \omega_0 t)$$

$$W_\psi f(u, s) = a \sqrt{s} \hat{\psi}^*(s \omega_0) \exp(i \omega_0 u) = a \sqrt{s} \hat{g}(s \omega_0 - \eta) \exp(i \omega_0 u)$$

$$\frac{\xi}{\eta} P_w f(u, \xi) = \frac{1}{s} |W_\psi f(u, s)|^2 = a^2 \left| \hat{g}\left(\eta \left(\frac{\omega_0}{\xi} - 1\right)\right) \right|^2$$

Escalograma Normalizado

¿Dónde es máximo?

$$\omega_0 = \xi$$

Ejemplo 2: Chirp Lineal - *Ondita Gaussiana*

$$f(t) = \exp(i a t^2)$$

$$\frac{1}{s} |Wf(u, s)|^2 = \left(\frac{4\pi\sigma^2}{1+4s^2 a^2 \sigma^4} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{1+4s^2 a^2 \sigma^4} (\eta - 2as u)^2 \right)$$

Sea u fijo

Si $4 a^2 s^4 \sigma^4 \ll 1 \Rightarrow \frac{\xi}{\eta} P_w f(u, \xi)$ es función Gaussiana de s

¿Dónde es máximo? $\eta/s = 2au$

$$\phi(u) = au^2$$

$$\xi(u) = \eta/s = 2au = \phi'(u)$$

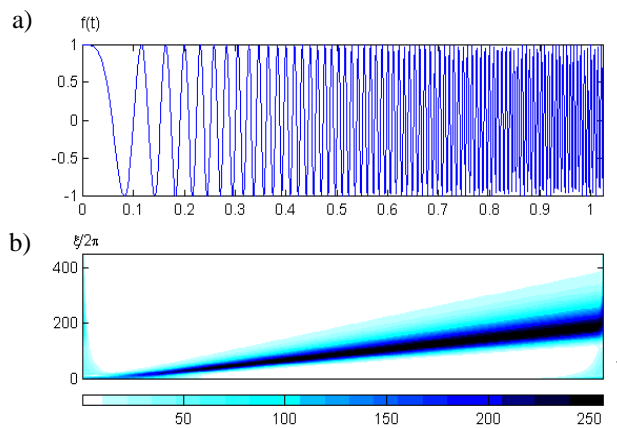
Frecuencia
Instantánea

08/05/2009

APAS'2009

Chirp Lineal: Escalograma Normalizado (c/Ondita: de Gabor)

$$f(t) = \exp(i \omega_0 t^2)$$



08/05/2009

APAS'2009

46

Escalograma Normalizado y Phase compleja $\phi_W(u, \xi)$

$$f_1(t) = \cos(a_1 t^2)$$

$$f_2(t) = \cos(-a_2 t^3)$$

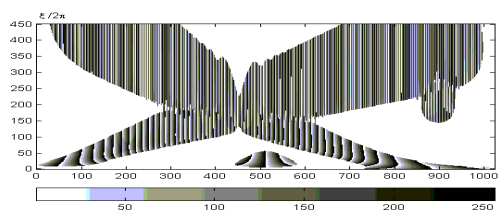
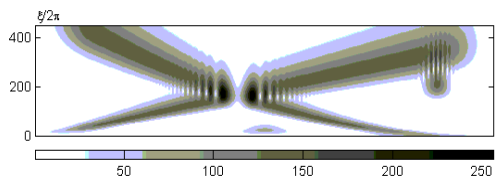
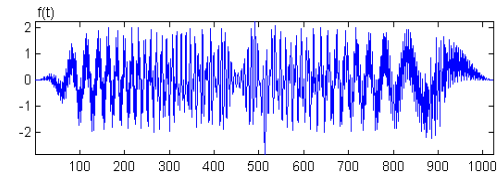
$$f_3(t) = \cos(a_3 t) \exp(-b_3 t^2)$$

$$f_4(t) = \cos(a_4 t) \exp(-b_4 t^2)$$

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

Ancho de Banda de los
 átomos ondita
 es proporcional a

$$1/s = \xi/\eta$$

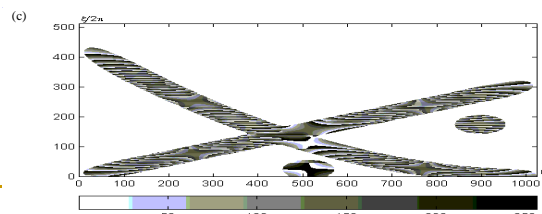
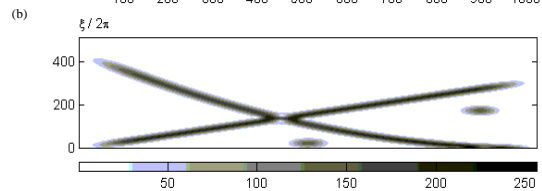
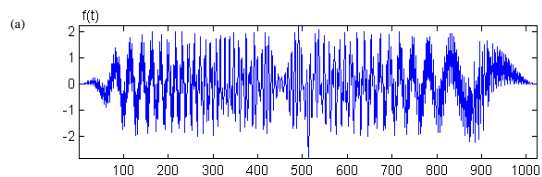


08/05/2009

APAS'2009

47

Espectrograma $P_S f(u, \xi)$ y fase compleja de $Sf(u, \xi)$



08/05/2009

48

Onditas Discretas

(Daubechies, 1992)

$f(t) \Rightarrow$ muestreada uniformemente en intervalos N^{-1} en $[0,1]$

$Wf(u,s)$ sólo puede calcularse para escalas $N^{-1} < s < 1$

- normalizar la distancia de muestreo a 1
- considerar la señal dilatada $f(t) = f(t/N)$
- $Wf(u,s) = N^{-1/2} Wf(Nu, Ns)$ (por cambio de variables)

08/05/2009

APAS'2009

49

Onditas Discretas: Escalas y Octavas

$\{f[n]\}$ la señal discreta de tamaño N

DWT $f(u,s)$ se calcula a escalas $s=a^j$ con $a=2^{1/v}$

v escalas intermedias en cada **octava** $[2^j, 2^{j+1})$.

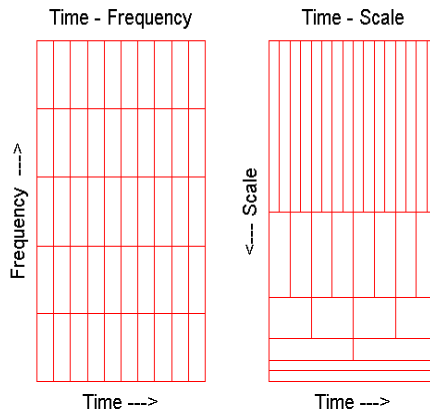
v : número de **voces** o **sub-octavas**

08/05/2009

APAS'2009

50

Recubrimiento Tiempo-Frecuencia y Tiempo-Escala



08/05/2009

APAS'2009

51

Particiones del Plano Tiempo-Escala

$$s = a^j$$

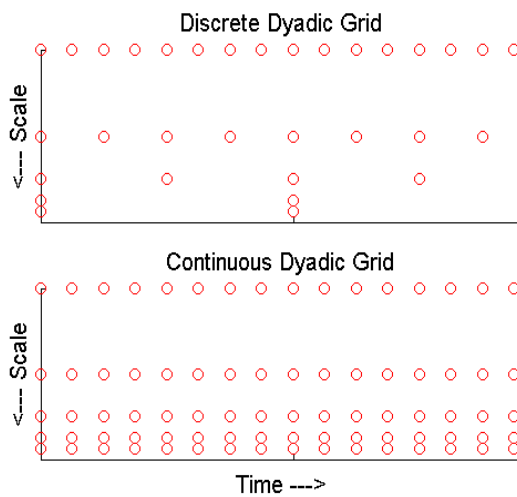
$$u = n \cdot a^j$$

$$a = 2$$

$$s = a^j$$

$$u = n \cdot a^j$$

$$a = 2$$



08/05/2009

APAS'2009

52

La Ondita Discreta escalada

$\psi(t)$ ondita con soporte en $[-K/2, K/2]$

Para $2 \leq a^j \leq N K^{-1}$

$$\psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{n}{a^j}\right)$$

Ondita Discreta escalada por a^j .

Tiene $K a^j$ valores no nulos en $[-N/2, N/2]$

⇓

escala $a^j > 2$

De otro modo el intervalo de muestreo podría ser mas grande que el

supp de ψ

EEG - Descomposición Díadica

