ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO AVANZADO DE SEŃALES

(APAS 2009)

Elementos de matemática avanzada.

FI- UNER y FICH- UNL

María Eugenia Torres

Abril 2009

Contenidos

Alcance y objetivos

En estas notas tratamos de **complementar** con un análisis mas detallado ciertos contenidos desarrollados en los libros utilizados como bibliografía del curso.

Si encuentra errores de tipeo o de alguna otra índole, le agradeceremos nos lo haga saber para ir mejorando para ediciones posteriores, enviando un e-mail a `metorres@santafe-conicet.gov.ar`. Desde ya, muchas gracias.

Capítulo I

Introducción: Del correcto uso del idioma español

Es frecuente encontrar en los libros de matemática superior traducidos en México numerosas palabras incorrectas en idioma español denominadas “anglicismos”[1] y cuyo mal uso obedece a una mala traducción del idioma inglés, en lo que se denomina una *transliteración* [2]. Intentamos a través de estas notas corregir estos errores de uso, que conducen no solamente a un mal uso de nuestra lengua sino también a usos incorrectos de conceptos matemáticos precisos.

Círculo y circunferencia

Una palabra que aparece mal utilizada con frecuencia en los libros de matemática, en lugar de circunferencia, es círculo. Si consultamos el significado de estas dos palabras en diccionario de la Real Academia Española [**?**] observaremos entre sus acepciones las siguientes:

Círculo
(Del lat. circ$\breve{u}$lus, dim. de circus, cerco).

1. m. Geom. Área o superficie plana contenida dentro de una circunferencia.
2. m. circunferencia.

Circunferencia
(Del lat. circumferent$\breve{i}$a).

1. f. Geom. Curva plana, cerrada, cuyos puntos son equidistantes de otro, el centro, situado en el mismo plano.
2. f. Contorno de una superficie, territorio, mar, etc..

[1]Conforme a la Real Academia Española [**?**]. *Anglicismo.* (1). *m.* Giro o modo de hablar propio de la lengua inglesa. (2). *m.* Vocablo o giro de esta lengua empleado en otra. (3). *m.* Empleo de vocablos o giros ingleses en distintos idiomas.

[2]*Transliterar*: (De trans- y el lat. litte(ra, letra)). 1.*tr.* Representar los signos de un sistema de escritura mediante los signos de otro [**?**].

Es así que un *círculo*, en geometría, es el conjunto de los puntos de un plano que se encuentran contenidos en una circunferencia. Dicho de otro modo, es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a otro punto fijo, llamado centro, es menor o igual que la longitud del radio. La segunda acepción encontrada en el diccionario, como sinónimo de circunferencia, es correcta cuando es utilizada en otros contextos de nuestra lengua, pero no en matemática o en ciencias ligadas a ella, tales como las de la ingeniería.

Debe quedar claro que en el contexto de matemática para ingeniería, en castellano, la palabra *círculo* es una **superficie** geométrica plana contenida dentro de una circunferencia con **área** definida; mientras que se denomina circunferencia a una **curva** geométrica plana, cerrada, cuyos puntos son equidistantes del centro, y sólo posee **longitud**. Aunque ambos conceptos están relacionados, no debe confundirse la circunferencia (línea curva) con el círculo (superficie).

Este error se observa en el libro "Matemáticas avanzadas para Ingeniería"de P.V. O'Neil [**?**] en su capitulo 8: Geometría y aritmética de los números complejos. Deberá cuidarse de reemplazar siempre que corresponda por la denominación adecuada, recordando que:

> En el plano complejo, dado un número complejo $a \in \mathbb{C}$ y un número real $r \in \Re$, el conjunto z de puntos que satisface $|z-a| = r$ es una *circunferencia*.
>
> Un *círculo* es el conjunto de puntos que satisface $|z-a| \leq r$ (si incluye a la circunferencia) y $|z-a| < r$ (si no incluye a la circunferencia).
>
> Desde un punto de vista topológico, el conjunto de puntos del plano complejo que satisface $|z-a| \leq r$ ($|z-a| < r$) se denomina un disco cerrado (abierto) de centro a y radio r.
>
> En lugar de *disco* se suele usar la palabra *bola* o *entorno*.

Transformaciones y "Mapeos"

En textos de matemática escritos en inglés es frecuente encontrar las palabras *map*, *mapping*, *transform*, *transformation*. En consecuencia, en los textos traducidos encontramos *mapa*, *mapeo*, *transformada*, *transformación*. Sin embargo, en muchos de los casos su uso en castellano es erróneo y constituye un "anglicismo"

La palabra inglesa *mapping* puede referir a numerosas áreas científicas, entre ellas cartografía, linguística (usado como metáfora o analogía), genética ("Gene mapping, the as-

[3] La Topología es el estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas.(I. Stewart, "Conceptos de matemática moderna". Alianza Universidad, 1988. p. 171.) Es una disciplina matemática que estudia las propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas. La Topología se interesa por conceptos como proximidad, número de agujeros, el tipo de consistencia (o textura) que presenta un objeto, comparar objetos y clasificar, entre otros múltiples atributos donde destacan conectividad, compacidad, metricidad, etcétera. En matemática se usa la palabra topología con dos sentidos: informalmente es el sentido arriba especificado, y de manera formal se refieren a una cierta familia de subconjuntos de un conjunto dado, familia que cumple unas reglas sobre la unión y la intersección. Este segundo sentido puede verse desarrollado en el artículo espacio topológico.

signment of DNA fragments to chromosomes"), en informática ("Data mapping", "Memory-mapped I/O" o "Texture mapping"), en neurociencia ("Brain mapping"). En Matemática la palabra *Map* (o *mapping*) se usa (siempre en inglés) como sinónimo de *function* (función) o -en lógica formal - como el predicado de un "funcional"(un símbolo lógico que puede aplicarse a un término objeto para producir otro término objeto). El uso de la palabra *mapping* sugiere que se trata de un término mas genérico. En el contexto de la geometría el término "function" se refiere a un *mapping* cuyo propósito es asignar valores a los elementos del dominio. En otras palabras, una función define un conjunto de valores (de aquí que para definir una función se necesita una terna (f, A, B)) constituida por un conjunto A denominado *dominio*, un conjunto B denominado *codominio* y la *ley* f que asigna a cada elemento de A un *único elemento* de B . Por el contrario, *mapping* tiene una connotación mas geométrica, como cuando se habla de "a mapping of one space to another" (una transformación de un espacio en otro).

Usada en castellano [**?**] las palabras mapa y mapear poseen las siguiente acepciones:

1. **mapa**. (Del b. lat. mappa, toalla, plano de una finca rústica).
   a) m. Representación geográfica de la Tierra o parte de ella en una superficie plana.
   b) m. Representación geográfica de una parte de la superficie terrestre, en la que se da información relativa a una ciencia determinada. Mapa lingüístico, topográfico, demográfico.
   c) f. coloq. p. us. Lo que sobresale en un género, habilidad o producción. *La ciudad de Toro es la mapa de las frutas.*
2. **mapear**.(De mapa).
3. tr. Biol. Localizar y representar gráficamente la distribución relativa de las partes de un todo; como los genes en los cromosomas.
4. tr. cult. Chile. Hacer mapas.
5. tr. cult. Chile. Trasladar a un mapa sistemas o estructuras conceptuales.

Desde el punto de vista de la matemática, un **mapa** es un elemento matemático utilizado en la llamada "geometría diferencial", descripto como una porción de la "variedad análoga" a un espacio vectorial; los cambios de mapa indican cómo estas porciones de "variedades" se acoplan entre sí. Una variedad es el objeto geométrico estándar en matemática, que generaliza la noción intuitiva de curva (1-variedad) o superficie (2-variedad) a cualquier dimensión y sobre cuerpos[4] variados (no forzosamente el de los reales). Este tipo de teoría matemática se

[4]Un cuerpo es una estructura del "álgebra abstracta" en la cual las operaciones de adición y multiplicación se pueden realizar y cumplen las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva, además de la existencia de un inverso aditivo y de un inverso multiplicativo, los cuales permiten efectuar la operaciones de substracción y división (excepto la división por cero); estas propiedades ya son familiares de la aritmética de números ordinarios.
Los cuerpos son objetos importantes de estudio en álgebra puesto que proporcionan la generalización apropiada de dominios de números tales como los conjuntos de números racionales, de los números reales, o de los números complejos.

utiliza cuando se trabaja por ejemplo en control no lineal o en ciertas áreas de mecánica de los fluidos.

La palabra **transformación** (*transformation* en inglés) en su versión mas simple comprende una variedad de diferentes funciones de la geometría, tales como rotaciones, reflexiones y traslaciones. Estas pueden aplicarse en el espacio Euclídeo. También es utilizada para denominar operaciones en el contexto del álgebra lineal, y que utilizan explícitamente teoría de matrices. En este contexto, se conocen las transformaciones lineales. Sin embargo no se limita a esto. El término transformación, algunas veces expresado como transformada, puede hacer referencia a los siguientes elementos, entre muchos otros:

- Transformada de Fourier, Transformada de Fourier discreta y Transformada rápida de Fourier
- Transformada de coseno discreta y Transformada de coseno discreta modificada
- Transformada de Hilbert
- Transformada de Laplace
- Transformada Z
- Transformadas wavelet
- Transformación bilineal
- Transformación lineal
- Transformación polinómica

e incluso puede ser utilizada como sinónimo de función.

Por lo anterior, en el contexto de este curso, **no** hablaremos de “mapas”, ni de “mapeos” y nos limitaremos a referirnos a *transformaciones*, por ser la denominación correcta en el uso del idioma español en el área de la matemática en que estamos trabajando.

Se recomienda por lo tanto cambiar esta denominación, siempre que corresponda, en la literatura utilizada.

Asumir y suponer

En libros de uso corriente en ingeniería, traducidos del inglés o bien escritos por autores mejicanos, es frecuente que aparezca la palabra “asumir” como sinónimo de “suponer”. Este error proviene de que en inglés las palabras *assume* y *suppose* pueden ser utilizados como sinónimos cuando la palabra assume se utiliza con el significado “*to take as granted or true*”, por ejemplo: “*I assume he'll be there*”[**?**]. Es así que su incorrecto uso en castellano constituye una vez mas un anglicismo. En efecto, en español ambas palabras tienen significados diferentes tal como podemos verificar recurriendo una vez mas al diccionario de nuestra lengua [**?**]:

asumir.
(Del lat. assumĕre).

1. tr. Atraer a sí, tomar para sí.
2. tr. Hacerse cargo, responsabilizarse de algo, aceptarlo.
3. tr. Adquirir, tomar una forma mayor.

Ejemplos que podemos encontrar en internet

- . . . la Justicia debe *asumir* su cuota de responsabilidad.
- Jóvenes se reúnen para *asumir* compromiso bautismal.
- . . . hace tiempo que ha *asumido* el poder.
- Los docentes que este año contrate el Ministerio de Educación deberán *asumir* el cargo dentro de los cinco días calendarios de haber recibido la resolución . . .

suponer
(Del lat. supponĕre).

1. tr. Dar por sentado y existente algo.
2. tr. Fingir, dar existencia ideal a lo que realmente no la tiene.
3. tr. Traer consigo, importar. La nueva adquisición que ha hecho supone desmedidos gastos de conservación.
4. tr. Conjeturar, calcular algo a través de los indicios que se poseen.
5. intr. Tener representación o autoridad en una república o en una comunidad.

Ejemplos que podemos encontrar en internet:

- Borges: "Es un error *suponer* que todas las palabras deben usarse"
- . . . no es lo mismo *suponer* buena fe que ignorar malas acciones"

Es así que teniendo en cuenta la acepción de la palabra, se puede asumir un cargo o una función, pero no se puede asumir una hipótesis matemática o física. En este último caso se da algo (una hipótesis) por sentado o válido. Por lo tanto, la palabra correcta es *suponer* que determinada hipótesis o propiedad es válida.

Bibliografía

[] Merriam Webster Online Dictionary `http://www.merriam-webster.com/dictionary`

[] O'Neil, Peter V. Matemáticas avanzadas para Ingeniería. Thomson, Sexta Edición, 2008.

[] Real Academia Española. `www.rea.org.es`.

Capítulo II

Elementos de matemática superior

En este capítulo presentamos algunos elementos y conceptos matemáticos que complementarán los que los alumnos encontrarán en el apéndice del libro [1], utilizado como referencia para este curso. Estos conceptos involucran definiciones, propiedades y teoremas que corresponden a distintas áreas de la matemática, habitualmente denominada de manera genérica como matemática superior, que comprenden: espacios métricos, topología, álgebra abstracta, análisis funcional y espacios funcionales entre otras. No intentamos ser exhaustivos, sino tan sólo presentar algunas nociones elementales para facilitar el estudio y seguimiento de la literatura científica de uso corriente para ingeniería. Para un mayor dominio y comprensión de cada tema, deberá recurrirse a las referencias donde se encontrarán libros específicos para cada uno de los temas aquí desarrollados.

Para ayudar a la ubicación contextual, de manera general diremos que [2]:

- El **análisis real** es la rama de la matemática que se ocupa de los números reales y sus funciones. Se puede ver como una extensión rigurosa del cálculo, que estudia más profundamente las sucesiones y sus límites, continuidad, derivación, integración, y las sucesiones de funciones. Además empieza un proceso de abstracción cuyo sendero pasa por la topología.

- El **espacio topológico** (sec.II.1) es la noción de base de la *topología elemental*, dominio que sólo depende de la teoría de conjuntos (no está construido a partir de otra cosa), y que tiene consecuencias importantes en el campo del análisis porque permite definir rigurosamente la continuidad y los límites.

- Un **espacio métrico** (sec.II.2) es un tipo particular de *espacio topológico*, donde está definida una *distancia* entre puntos. Corresponde al caso muy común en que se dispone de una noción de distancia sobre el espacio.

- El **álgebra abstracta** es el campo de la matemática que estudia las *estructuras algebraicas* como las de grupo, anillo, cuerpo o espacio vectorial. Muchas de estas estructuras fueron definidas formalmente en el siglo XIX y, de hecho, el estudio del álgebra abstracta fue motivado por la necesidad de más exactitud en las definiciones matemáticas. El estudio del álgebra abstracta ha permitido observar con claridad lo intrínseco de las afirmaciones lógicas en las que se basan la matemática y las ciencias naturales, y se usa hoy en día prácticamente en todas las ramas de la matemática. Además, a lo largo de la historia, los algebristas descubrieron que estructuras lógicas aparentemente diferentes muy a menudo pueden caracterizarse de la misma forma con un pequeño conjunto de axiomas.

El término álgebra abstracta se usa para distinguir este campo del *álgebra elemental* o del álgebra de la escuela secundaria que muestra las reglas correctas para manipular fórmulas y expresiones algebraicas que conciernen a los números reales y los números complejos. El álgebra abstracta fue conocida durante la primera mitad del siglo XX como *álgebra moderna*.

- El **análisis funcional** es la rama de las matemáticas, mas específicamente del análisis, que trata del estudio de espacios de funciones. Tienen sus raíces históricas en el estudio de transformaciones tales como transformación de Fourier y en el estudio de las ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales. La palabra funcional se remonta al *cálculo de variaciones*, implicando una función cuyo argumento es una función. Su uso en general se ha atribuido a Volterra.

  En la visión moderna inicial, se consideró el análisis funcional como el estudio de los *espacios vectoriales normados completos* sobre los reales o los complejos. Tales espacios se llaman *Espacios de Banach*. Un ejemplo importante es el *espacio de Hilbert*, donde la norma surge de un producto escalar. Estos espacios son de importancia fundamental en la formulación matemática de la mecánica cuántica. Para cualquier número real $p \geq 1$, un ejemplo de un espacio de Banach viene dado por los espacios L^p.

  Más general y modernamente, el análisis funcional incluye el estudio de los *espacios de Fréchet* y otros espacios vectoriales localmente convexos y aún topológicos.

  Un objeto importante de estudio en análisis funcional son los operadores lineales continuos definidos en los espacios de Banach y de Hilbert. Éstos conducen naturalmente a la definición de C^*-álgebra y otras álgebras de operadores.

En matemáticas, un *espacio funcional* es un conjunto de funciones de un conjunto X a un conjunto Y, de una clase dada. Se llama un espacio porque en la mayoría de las aplicaciones, es un espacio topológico o un espacio vectorial. Los espacios funcionales aparecen en varias áreas de las matemáticas:

- en la teoría de conjuntos, el conjunto de partes de un conjunto X se puede identificar con el conjunto de todas las funciones de X en $\{0, 1\}$ (*funciones características*);

- en el álgebra lineal el conjunto de toda las transformaciones lineales del espacio vectorial de V en otro, W, sobre el mismo cuerpo, es en sí mismo un espacio vectorial;

- en el análisis funcional se ve lo mismo para las transformaciones lineales continuas, incluyendo topologías en los espacios vectoriales subyacentes, y muchos de los ejemplos principales son espacios funcionales con topología;

- en la topología, uno puede procurar poner una topología en las funciones continuas del espacio topológico X a otro E, cuya utilidad depende de la naturaleza de los espacios;

- en la topología algebraica, el estudio de la teoría de la homotopía es esencialmente el de invariantes discretos de espacios funcionales;

- en la teoría del proceso estocástico, el problema técnico básico es cómo construir una medida de probabilidad en un espacio funcional de trayectorias del proceso (funciones del tiempo);
- en la teoría de categorías el espacio funcional aparece como bifuntor canónico de representación pero como funtor simple de tipo [X, -] como funtor adjunto, a un funtor del tipo (Xx -) en objetos;
- en el cálculo lambda y la programación funcional, tipos de espacio funcional se utilizan para expresar la idea de función de orden superior.
- en la teoría de dominios, la idea básica es encontrar construcciones de un orden parcial que pueda modelar cálculo lambda, creando una buena categoría cartesiano cerrada.
- Otra idea relacionada desde la física es el espacio de configuración. Esto no tiene un significado único, pero para N partículas moviéndose en una variedad[1] M puede ser el espacio de posiciones MN o el subespacio donde no hay dos posiciones iguales. Para tomar en cuenta la posición y los momentos uno se mueve al fibrado cotangente. Las configuraciones de una curva serían un espacio funcional de alguna clase. En la mecánica cuántica una formulación acentúa las historias como configuraciones. En breve, un espacio de configuración es típicamente "la mitad" (ver distribución lagrangiana) del espacio de fase que se construye desde un espacio funcional.

  Los espacios de configuración se relacionan con la *teoría de trenzas*, también, puesto que la condición en una cuerda de no pasar por sí misma es formulada cortando diagonales de los espacios funcionales.

II.1. Espacios topológicos

Los conceptos de conjunto abierto y vecindad pueden definirse mediante una métrica en el espacio considerado. Otro camino es, sin definir métrica alguna en conjunto dado, definir

[1] Una *variedad* es el objeto geométrico estándar en matemática, que generaliza la noción intuitiva de curva (1-variedad) o superficie (2-variedad) a cualquier dimensión y sobre cuerpos variados (no forzosamente el de los reales); y son el elemento teórico para la teoría de control no lineal y sistemas no lineales. Existen diversas variantes utilizadas según el dominio particular considerado:

- *variedades diferenciables*: son como las superficies lisas (sin puntos angulosos) y generalmente reales, donde se pueden definir en cualquier punto vectores (o planos) tangentes; están utilizadas por la teoría de los grupos de Lie, por el cálculo diferencial sobre los espacios topológicos más generales (que se utilizan en mecánica, por ejemplo);
- *variedades algebraicas*: son curvas o superficies definidas como raíces de polinomios de varias variables generalmente complejas;
- *variedades aritméticas*: son casos particulares de variedades algebraicas, más especializadas, para las aplicaciones orientadas a la teoría de números. El cuerpo de referencia es el de los números racionales, o una de sus extensiones.

Un poco más formalmente, podemos decir que una variedad de dimensión n es un espacio que se parece localmente a $\mathbb{R}^n$. Esto nos hace pensar que una variedad esta compuesta de parches n-dimensionales, que donde los parches se traslapan están pegados topológicamente (ver variedad diferenciable).

directamente, mediante axiomas, el sistema de conjuntos abiertos. Este camino conduce a los espacios topológicos; respecto de éstos, los espacios métricos representan un caso, aunque muy importante, especial.

Definición II.1 *Sea X un conjunto cualquiera. Se llama topología en X a todo sistema τ de subconjuntos G de X que verifica las siguientes condiciones:*

- *El propio conjunto X y el conjunto vacío pertenecen a τ.*
- *La unión $\cup_\alpha G_\alpha$ de un número cualquiera (finito o infinito) y la intersección $\cap_{k=1}^n G_k$ de un número finito de conjuntos de τ, pertenecen a τ*

El par (X, τ) se denomina espacio topológico*. Los conjuntos pertenecientes al sistema τ se denominan* abiertos.

Un espacio métrico está constituído por un conjunto de puntos y una métrica introducida en dicho conjunto; de la misma forma un espacio topológico está constituído por un conjunto de puntos y una topología introducida en él. Por lo tanto, definir un espacio topológico quiere decir definir un conjunto X y una topología en él, es decir, indicar aquellos subconjuntos que se consideran abiertos en X.
Está claro que en un mismo conjunto se pueden introducir diferentes topologías, convirtiéndolo de este modo en diferentes espacios topológicos. Sin embargo, se denota el espacio topológico (X, τ) con sólo una letra, digamos T.
Los conjuntos $X - G$ (se lee: "X menos G"), complementarios a los abiertos, se llaman conjuntos *cerrados* del espacio topológico X. Se tiene así que:

1. El conjunto $\emptyset$ y todo el espacio T son cerrados.
2. La intersección de un número cualquiera (finito o infinito) y la unión de un número finito de conjuntos cerrados son cerrados.

Ejemplo II.1 *Sea T un conjunto arbitrario. Consideramos como abiertos a todos sus subconjuntos. Es obvio entonces que se cumplen los axiomas de la definición y obtenemos entonces un espacio topológico. En él todos los conjuntos son a la vez abiertos y cerrados y por lo tanto, cada uno coincide con su clausura[2].*

Ejemplo II.2 *En el otro extremo se puede considerar en un conjunto abierto arbitrario X la topología compuesta por sólo dos conjuntos: el propio conjunto X y el conjunto vacío $\emptyset$. Aquí la clausura de todo conjunto no vacío coincide con todo X. Este espacio topológico, que no representa gran interés, suele llamarse "espacio de puntos pegados".*

Definición II.2 *Sean X e Y son dos espacios topológicos, y f una función de X a Y. Entonces se dice que f es un homeomorfismo de X en Y si y sólo si se cumple lo siguiente:*

1. *f es biyectiva (uno a uno y suryectiva)*
2. *f es continua*
3. *f^{-1} (la inversa de f) es continua*

Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, Y se dice homeomorfo *a X. Si dos espacios son homeomorfos entonces tienen exactamente las mismas propiedades topológicas.*

[2]Se denomina *clausura* de un conjunto al conjunto cerrado mas pequeño que lo contiene.

II.2. Espacios métricos

En matemática, un espacio métrico es un tipo particular de espacio topológico, donde está definida una distancia entre puntos, corresponde al caso muy común en que se dispone de una noción de distancia sobre el espacio.

Definición II.3 (Espacio métrico) *Un espacio métrico es un conjunto M (cuyos elementos se denominan puntos) con una función distancia asociada (también llamada una métrica) $d : M \times M \to \mathbb{R}$ (donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales). Para todo x, y, z en M, esta función debe satisfacer las siguientes condiciones:*

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, x) = 0$ *(reflexividad)*
3. *si* $d(x, y) = 0$ *entonces* $x = y$ *(identidad de los indiscernibles)*
4. $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetría)*
5. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(desigualdad triangular).*

Observación: Los conjuntos abiertos de cualquier espacio métrico verifican los axiomas de la definición de un espacio topológico, por lo tanto, todo espacio métrico es un espacio topológico.

II.2.1. Otras definiciones

- Se llama *bola (abierta) centrada en* $a \in M$ y de radio $r \in \mathbb{R}^+$, al conjunto $\{x \in M / d(x, a) < r\} \subset M$. Se denota usualmente como $B(a, r)$ o como $B_r(a)$.
- Se llama *bola cerrada centrada en* $a \in M$ y de radio $r \in \mathbb{R}^+$, al conjunto $\{x \in M / d(x, a) \leq r\} \subset M$. Se denota usualmente como $Bc(a, r)$ o por $\overline{B}(a, r)$, donde $\overline{B}$ se lee como *la clausura de* B.

En análisis matemático, una *sucesión de Cauchy* es una sucesión tal que la distancia entre dos elementos se va reduciendo a medida que se avanza. Se llama así en honor al matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Su interés radica en que se puede verificar que una sucesión es de Cauchy sin conocer el punto de convergencia.

Definición II.4 (Sucesión de Cauchy) *En un espacio métrico (X, d), una sucesión $\{x_k\}$ se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N_ε en los naturales, tal que para todo $n, m > N_\varepsilon$ se verifica que la distancia entre dos elementos $d(x_n, x_m)$ es inferior a ε, i.e.:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \quad N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \textit{tal que} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \textit{si } n, m > N_\varepsilon.$$

Es fácil demostrar que toda sucesión convergente es de Cauchy, sin embargo no toda sucesión de Cauchy es convergente. Por ejemplo, en el intervalo real $(0, 2)$, la sucesión $\{\frac{1}{k}\}$ es de Cauchy pero no es convergente, pues su límite es cero y éste no está en el espacio donde definimos la sucesión.

Definición II.5 (Espacio métrico completo) *Dado un espacio métrico, se dice que es* completo *cuando toda sucesión de Cauchy converge en él.*

Al pesar de lo trivial del ejemplo anterior donde la sucesión de Cauchy no convergía, en espacios más abstractos pero no por eso menos familiares, como los espacios de funciones, demostrar Completitud a veces no es tan trivial. Una de las razones de esto es que la completitud no se preserva necesariamente con homeomorfismos como pasa con la conexidad y la compacidad.

Intuitivamente, un espacio es completo si "no tiene agujeros", si no tiene "puntos faltantes". Por ejemplo, el conjunto de los números racionales no es un espacio completo, porque $\sqrt{2}$ es "faltante" aún cuando se quiera construir una sucesión de números racionales que converja a él.

Ejemplos

- La distancia trivial: $d(x, y) = 0$ si $x = y$, caso contrario, 1, es una distancia.
- Los números reales con la función distancia $d(x, y) = |y-x|$ dada por el valor absoluto y, más generalmente, el n-espacio euclídeo con la distancia euclídea, son espacios métricos completos.
- Más generalmente aun, cualquier espacio vectorial normado es un espacio métrico definiendo $d(x, y) = ||y-x||$. Si tal espacio es completo, lo llamamos **espacio de Banach**.
- Si X es un conjunto y M es un espacio métrico, entonces el conjunto de todas las funciones acotadas $f : X \to M$ (i.e. aquellas funciones cuya imagen es un subconjunto acotado de M) puede ser convertido en un espacio métrico definiendo $d(f, g) = sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$ para dos funciones acotadas cualesquiera f y g. Si M es completo, entonces este espacio también es completo.
- Si X es un espacio topológico y M es un espacio métrico, entonces el conjunto de todas las funciones continuas acotadas de X a M forma un espacio métrico si definimos la métrica como antes: $d(f, g) = sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$ para dos funciones continuas acotadas f y g cualesquiera. Si M es completo, entonces este espacio también es completo.
- Si M es un espacio métrico, podemos convertir al conjunto $K(M)$ de todos los subconjuntos compactos de M en un espacio métrico definiendo **distancia de Hausdorff**:
  $d(X, Y) = \text{ínf}\{r :$ para cada $x \in X$ existe un $y \in Y$ con $d(x, y) < r$
  y para cada $y \in Y$ existe un $x \in X$ con $d(x, y) < r\}$,
  simbólicamente, sea:

$$\begin{aligned} R \;=\; & \{r \in \mathbb{R}/(\text{ p.c. } \quad x \in X \quad \exists \quad y \in Y \quad / \quad d(x, y) < r) \wedge \\ & (\text{ p.c. } \quad y \in Y \quad \exists \quad x \in X \quad / \quad d(x, y) < r)\} \end{aligned}$$

  entonces se define la distancia de Hausdorff como:

$$d(X, Y) = \inf_r R.$$

En esta métrica, dos elementos están cerca uno de otro si cada elemento de un conjunto está cerca de un cierto elemento del otro conjunto. Se puede demostrar que $K(M)$ es completo si M es completo.

II.2.2. Axiomas de separabilidad

Aunque muchos conceptos principales de la teoría de espacios métricos (conjuntos abiertos, entornos, bases, etc.) se extienden fácilmente a cualquiera espacio topológico, un espacio topológico arbitrario representa un ente demasiado general desde el punto de vista de los problemas del Análisis. En estos espacios se producen, a veces, situaciones que difieren de modo sustancial de lo que puede ocurrir en un espacio métrico. Así , por ejemplo, en un espacio topológico un conjunto finito de puntos puede no ser cerrado.

Entre los espacios topológicos se distinguen espacios que por sus propiedades se aproximan a los espacios métricos. Para ello es necesario agregar a los axiomas ya establecidos en la definición de espacios topológicos algunas condiciones adicionales. Condiciones de *numerabilidad*[3] que permiten estudiar la topología del espacio a través del concepto de convergencia. Otro tipo de condiciones adicionales y de naturaleza distinta son los *axiomas de separabilidad*.

T_1**. Primer axioma de separabilidad:** Para dos puntos diferentes cualesquiera x e y del espacio T existe una vecindad O_x del punto x, que no contiene al punto y, y una vecindad O_y del punto y que no contiene al punto x.
Los espacios que verifican este axioma se denominan T_1–espacios.
En un T_1–espacio, todo punto es un conjunto cerrado. Por lo tanto se pude demostrar que en un T_1–espacio todo conjunto formado por un número finito de puntos es cerrado. Además, puede demostrarse que el axioma T_1 es equivalente a pedir que todos estos conjuntos sean cerrados.
El segundo axioma es una acentuación del primero.

T_2**. Segundo axioma de separabilidad o axioma de Hausdorff:** Para dos puntos cualesquiera x e y del espacio topológico T existen vecindades O_x y O_y de intersección vacía.

Los espacios topológicos que verifican este axioma se denominan T_2–espacios o **espacios de Hausdorff**. Todo espacio de Hausdorff es un T_1–espacio, pero el recíproco no es cierto.

II.3. Espacio compacto

En el análisis matemático desempeña un papel fundamental el siguiente hecho, conocido como **Lema de Heine-Borel**[4]:

[3] Un conjunto se dice *numerable* cuando se puede establecer una correspondencia uno a uno entre sus elementos y el conjunto de los números naturales

[4] Heinrich Eduard **Heine** (1821- 1881): matemático alemán que se hizo conocido por sus resultados en funciones especiales y en análisis real.
Félix Édouard Justin Émile **Borel** (1871 -1956) fue un matemático y político francés. Junto con René-Louis Baire y Henri Lebesgue, estuvo entre los pioneros de la teoría de la medida y sus aplicaciones a la teoría de

Lema II.1 *De cualquier cubrimiento del segmento $[a, b]$ de la recta numérica por medio de intervalos se puede extraer un subcubrimiento finito.*

Esta afirmación continúa siendo válida cuando en lugar de intervalos se consideran conjuntos abiertos cualesquiera: de todo cubrimiento abierto del segmento $[a, b]$ se puede extraer un subcubrimiento finito.
Partiendo de esta propiedad del segmento de la recta numérica, introducimos el siguiente concepto importante:

Definición II.6 (Espacio compacto) *Un espacio topológico se denomina* compacto*, cuando cualquier cubrimiento abierto suyo contiene un subcubrimiento finito. Un espacio topológico compacto que verifica el axioma de separabilidad de Hausdorff se denomina un* compacto*.*

La propiedad de compacidad la tienen, además de los segmentos, todos los subconjuntos cerrados acotados de un espacio euclídeo de cualquier dimensión. Por el contrario, la recta, el plano y el espacio $\Re^3$ son ejemplos elementales de espacios no compactos.

Definición II.7 *Un sistema de conjuntos $\{A\}$ del conjunto T se denomina* centrado*, cuando cualquier intersección finita $\cap_{i=1}^{n} A_i$ de elementos del sistema es no vacía.*

Teorema II.1 *Para que un espacio topológico T sea compacto, es necesario y suficiente que verifique la condición:*
Todo sistema centrado de subconjuntos cerrados de este espacio tiene intersección no vacía.

Propiedades

Teorema II.2 *La imagen continua de un espacio compacto es compacto.*

Teorema II.3 *Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es un compacto.*

Teorema II.4 *Todo compacto resulta cerrado en cualquier espacio de Hausdorff que lo contiene.*

Los dos últimos teoremas indican que en los espacios de Hausdorff la compacidad es una propiedad *interna* del espacio, es decir que todo compacto continúa siendo compacto, aunque sea sumergido en espacios de Hausdorff cada vez mas amplios.

II.4. Sigma álgebra

Una σ–álgebra (se lee "sigma-algebra") [6] o σ-campo sobre un conjunto X es una colección Σ de subconjuntos de X que es cerrada bajo las operaciones de complementación y uniones numerables de sus elementos. Es el análogo numerable de un álgebra de Boole[5] y

la probabilidad. El concepto de *conjunto de Borel* fue así denominado en su honor.

[5]George **Boole** (1815– 1864) fue un matemático y filósofo inglés. Inventor de la Lógica Booleana, que es la base de la lógica de las computadoras digitales, Boole es considerado como uno de los fundadores de las ciencias informáticas.

toda σ-álgebra representa un álgebra Booleana. El uso principal de las σ-álgebras es en la definición de medidas en X, constituyendo un concepto importante en análisis matemático y en teoría de probabilidad.

Definición II.8 (σ-álgebra) *Dado un conjunto X, sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de todos sus subconjuntos. Se dice que un subconjunto no vacío Σ de $\mathcal{P}(X)$ es un σ–álgebra si y sólo si satisface las siguientes propiedades:*

- *si $A \in \Sigma$, entonces su complemento en X, el conjunto $X \backslash A$ también pertenece a Σ,*
- *si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección numerable de elementos de Σ, su unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ también estará en Σ.*

Esto quiere decir que un subconjunto Σ deberá satisfacer las siguientes tres condiciones para calificar como un σ-álgebra:

1. Ser cerrado bajo complementación
2. Ser cerrado bajo uniones numerables
3. Contener al conjunto vacío

De estos axiomas sigue que X y el conjunto vacío $\emptyset$ están en Σ (dado que Σ no es vacío) y que la σ-álgebra es también cerrada bajo intersecciones numerables, por las leyes de Morgan:

$$\begin{aligned}(A \cap B)^C &= A^C \cup B^C \\ (A \cup B)^C &= A^C \cap B^C.\end{aligned}$$

Una medida en X es una función que asigna un número real a cada subconjunto de X, permitiendo pensar de manera mas precisa en la noción de "tamaño" o de "volumen" de un conjunto. Uno podría desear asignar tal tamaño a todo subconjunto de X, sin embargo, el *axioma de elección* (de la teoría de conjuntos) implica que cuando el tamaño en consideración es la longitud standard de subconjuntos de la recta real, entonces, existen conjuntos (conocidos como *conjuntos de Vitali*[6]) para los cuales no existe dicho tamaño. Por esta razón se hace necesario considerar en cambio un colección mas pequeña de subconjuntos de X cuya medida esté definida y dichos conjuntos constituyen la σ-álgebra.

Definición II.9 (Medida) *Una* **medida** *μ es una función definida en una σ-álgebra $\mathcal{M}$ sobre un conjunto X y que toma valores en el intervalo extendido $[0, +\infty]$, tal que verifica las siguientes propiedades:*

- *El conjunto vacío tiene medida cero:*

$$\mu(\emptyset) = 0;$$

[6]Giuseppe **Vitali** (1875- 1932) fue un matemático italiano que trabajó en diferentes ramas del análisis matemático.

- *Es numerablemente aditiva o σ-aditiva:*
  Si $E_1, E_2, E_3, ...$ es una sucesión numerable de conjuntos mutuamente disjuntos en Σ, es decir si son tales que:
  $$E_i \in \Sigma \quad \forall\, i,$$
  y además
  $$E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j,$$
  entonces se verifica que la medida de la unión de todos los $E_i's$ es igual a la suma de las medidas de cada uno de los E_i:
  $$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$
  Los elementos de $\mathcal{M}$ se denominan conjuntos medibles.

II.4.1. Ejemplos

1. Si X es un conjunto cualquiera, entonces, la familia compuesta por sólo el conjunto vacío y X es una σ-álgebra trivial sobre X.
2. Otra σ-álgebra sobre X está dada por todo el conjunto de partes de X ($\mathcal{P}(X)$).
3. Una colección de subconjuntos de X que sea numerable y cuyos complementos sea numerable es una σ-álgebra, diferente de la de partes de X si y sólo si X no es numerable.
4. Si $\{\Sigma_a\}$ es una familia de σ-álgebras sobre X, entonces la intersección de todas las Σ_a también es una σ-álgebra sobre X.
5. Si U es una familia arbitraria de subconjuntos de X, entonces se puede formar una σ-álgebra especial a partir de U, denominada la *σ-álgebra generada por U*. Se nota con $\sigma(U)$ y se define del siguiente modo. Observar primero que existe una σ-álgebra sobre X que contiene a U, que es el conjunto de partes de X: $\mathcal{P}(X)$.
   Sea ϕ la familia de todas las σ-álgebras sobre X que contienen a U (esto es, una σ-álgebra Σ sobre X está en ϕ si y sólo si U es un subconjunto de Σ).
   Entonces, definimos $\sigma(U)$ como la intersección de todas las σ-álgebras en ϕ. $\sigma(U)$ es entonces la menor σ-álgebra sobre X que contiene a U.
   Como ejemplo, considérese el conjunto $\{1, 2, 3\}$. Entonces la σ-álgebra generada por el subconjunto $\{1\}$ es $\sigma(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$.
   Observar que en un abuso de notación, cuando la colección de subconjuntos contiene sólo un miembro, ejemplo A, entonces se escribe $\sigma(A)$ en lugar de $\sigma(\{A\})$.
6. Un ejemplo importante es el *álgebra de Borel* sobre un espacio topológico cualquiera: la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos (o, de modo análogo, por los conjuntos cerrados), es decir generada por la misma topología de X. En teoría de probabilidades, el álgebra de Borel constituye un ejemplo particular. Dada una variable aleatoria, definida en un espacio de probabilidad, su distribución de probabilidad es por definición, también una medida en el álgebra de Borel. Este álgebra es en los reales, la menor

σ-álgebra en $\mathbb{R}$ que contiene todos los intervalos.
Observar que esta σ-álgebra no es en general el conjunto de las partes completo. Un ejemplo no trivial es el llamado conjunto de Vitali [6].

7. En los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$, una σ-álgebra de importancia es la de los conjuntos medibles Lebesgue. Dicha σ-álgebra contiene más conjuntos que la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ y es preferida en teoría de integración, dado que provee un espacio de medida completo.

Definición II.10 (Espacio de medida y conjuntos medibles) *La terna (X, Σ, μ) se denomina* **espacio de medida**, *y los elementos de Σ se denominan* **conjuntos medibles**.

Definición II.11 (Espacio medible y funciones medibles) *El par ordenado (X, Σ), donde X es un conjunto y Σ es un σ-álgebra sobre X, se dice es un* **espacio medible**.

Una función entre dos espacios medibles se dice es una **función medible** *si la preimagen de todo conjunto medible es medible.*

Las medidas son definidas como cierto tipo de funciones de un σ-álgebra en $[0, +\infty]$. Para indicar las σ-álgebra se suele usar letras mayúsculas en lugar de Σ, con el objeto de evitar la confusión con el operador sumatoria, en este caso se tendrá $(X, \mathcal{A})$, en lugar de (X, Σ).

II.4.2. Propiedades de las medidas

Enumeramos en esta sección sólo algunas de las propiedades mas importantes de las medidas. Muchas mas pueden ser deducidas a partir de la definición de medida numerablemente aditiva.

- **Monotonía**. Una medida μ es monótona:
  Si E_1 y E_2 son conjuntos medibles, tales que $E_1 \subset E_2$, entonces
  $$\mu(E_1) \leq \mu(E_2).$$
- **Medidas de uniones infinitas de conjuntos de Σ**
  Si E_1, E_2, E_3, ... es una sucesión numerable de conjuntos en Σ, no necesariamente disjuntos, entonces:
  $$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$
- **Medidas de uniones infinitas de conjuntos medibles**
  Si E_1, E_2, E_3, ... son conjuntos medibles *encajados* de modo tal que E_n es un subconjunto de E_{n+1} para todo n, es decir si:
  $$E_n \subset E_{n+1}, \forall \quad n, \tag{II.1}$$
  entonces la unión de los conjuntos E_n también es medible y
  $$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(E_i). \tag{II.2}$$

- **Medida de intersecciones infinitas de conjuntos medibles**
  Si E_1, E_2, E_3, ... son conjuntos medibles *encajados* de modo tal que E_{n+1} es un subconjunto de E_n para todo n, es decir si:

$$E_{n+1} \subset E_n, \forall \quad n, \tag{II.3}$$

  entonces la intersección de los conjuntos E_n también es medible. Más aún, si al menos uno de los E_n tiene medida finita, entonces:

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i). \tag{II.4}$$

Observación: Esta última propiedad es falsa sin la hipótesis de que al menos uno de los conjuntos tenga medida finita. En efecto, sea por ejemplo la sucesión $\{E_n\}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = [n, \infty) \subseteq \mathbb{R},$$

que satisfacen la condición II.3 y poseen todos medida infinita. Pero, dado que su intersección es vacía, resulta $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0$.

La propiedad II.1–II.2 será de fundamental importancia en las propiedades del análisis multirresolución de la transformada ondita.

II.4.3. Medidas sigma-finitas

Definición II.12 (Espacio de medida finito) *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida.*

- (X, Σ, μ) *se dice un* **espacio de medida finito** *si $\mu(X)$ es un número real finito (no ∞).*
- (X, Σ, μ) *se dice* **σ-finito** *si X puede descomponerse en una unión numerable de conjuntos medibles de medida finita.*
- *Un conjunto en un espacio de medida posee* **medida σ-finita** *si es una unión de conjuntos de medida finita.*

Observación: Por ejemplo, los números reales con la medida de Lebesgue standard son σ-finitos pero no finitos. Considere los intervalos cerrados $[k, k+1]$ para todos los enteros k. Se tiene una cantidad numerable de tales intervalos, cada uno posee medida 1, y la unión de todos ellos es la recta real.

Considere ahora los números reales con la *medida de conteo*, que asigna a cada conjunto finito de números reales, el número de puntos en el conjunto. Este espacio de medida no es σ-finito, porque todo conjunto con medida finita contiene a lo sumo un número finito de puntos, y sería necesario un cantidad no numerable de tales conjuntos para cubrir todo el eje real.

II.4.4. Completitud

Definición II.13 *Un conjunto medible X se dice un* **conjunto nulo** *si $\mu(X) = 0$. Un subconjunto de un conjunto nulo se llama* despreciable.

Un conjunto despreciable no necesita ser medible, pero todo conjunto medible despreciable es automáticamente un conjunto nulo.

Definición II.14 *Una medida μ se dice* **completa** *si todo conjunto despreciable es medible.*

Una medida puede extenderse a completa considerando la σ-álgebra de los subconjuntos Y que difieren en un conjunto despreciable de un conjunto medible X, esto es, si la diferencia simétrica[7] de X e Y está contenida en un conjunto nulo. Entonces, por definición se dice que $\mu(Y)$ es igual a $\mu(X)$.

II.4.5. Ejemplos

Algunas medidas importantes son:

- La **medida de conteo**, definida por $\mu(S)$ = número de elementos en S.
- La **medida de masa puntual** (Point mass). Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y a un punto en A. Se define $\mu(A) = 1$ si $a \in A$ y 0 de otro modo. Entonces, μ es una distribución de masa, pensada como una masa puntual concentrada en a.
- La **medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$**. La medida de Lebesgue extiende la idea de "longitud" a una colección mas grande de conjuntos de $\mathbb{R}$, que incluye los conjuntos de Borel:
  1. Para intervalos abiertos y cerrados, se define $\mathcal{L}^1(a,b) = \mathcal{L}^1[a,b] = b - a$.
  2. Si $A = \cup_i [a_i, b_i]$ es una unión finita o numerable de intervalos disjuntos, se define la medida de A como la suma de las medidas de los intervalos: $\mathcal{L}^1(A) = \sum_i (b_i - a_i)$. Para un conjunto arbitrario A se define la medida de Lebesgue $\mathcal{L}^1(A)$ como:

$$\mathcal{L}^1(A) = inf \left\{ \sum_i (b_i - a_i) :, A \subset \cup_{i=1:\infty} [a_i, b_i] \right\}$$

[7] La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B, se indica como $A\Delta B$ y es el conjunto de elementos que están sólo en uno de dichos conjuntos, pero no en ambos. La operación es equivalente a la disjunción exclusiva (operación XOR) del álgebra de Boole.
Por ejemplo, la diferencia simétrica de los conjuntos $\{1,2,3\}$ y $\{3,4\}$ es $\{1,2,4\}$.
La diferencia simétrica es equivalente a la unión de ambos complementos relativos, es decir:

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

y también puede expresarse como la unión de ambos conjuntos, menos su intersección:

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B),$$

o con la operación XOR:

$$A\Delta B = \{x : (x \in A) \text{ XOR } (x \in B)\}.$$

Es decir que la medida de Lebesgue $\mathcal{L}^1(A)$ es la menor medida $\mathcal{L}^1$ de todos los posibles cubrimientos por intervalos reales del conjunto A.

- La medida de Lebesgue, que es la única medida completa invariante por traslaciones en una σ-álgebra que contenga intervalos de $\mathbb{R}$, tal que $\mu([0,1]) = 1$.
- Medida ángulo circular, es invariante ante rotaciones.
- La medida de Haar, para grupos topológicos localmente compactos, es una generalización de la medida de Lebesgue y tiene similares propiedades de unicidad.
- La medida de Hausdorff que es un refinamiento de la medida de Lebesgue para algunos conjuntos fractales.
- Todo espacio de probabilidad da lugar a una medida que toma el valor 1 en todo el espacio (y en consecuencia toma todos sus valores en el intervalo $[0,1]$). Una medida de este tipo se denomina una *medida de probabilidad*.
- La medida de Dirac μ_a está dada por $\mu_a(S) = \chi_S(a)$, donde χ_S es la función característica de S. La medida de un conjunto es 1 si contiene al punto a y 0 de otro modo.

Otras medidas son: medida de Borel, medida de Jordan, medida Ergódica, medida de Euler, medida de Gauss, medida de Baire, medida de Radon.

La medida de conteo

La medida de conteo es una forma intuitiva de dar medida a cualquier conjunto: el "tamaño" de un subconjunto se toma como el número de elementos del subconjunto si éste es finito, y como ∞ si el subconjunto es infinito.

Formalmente, sea un conjunto Ω y considérese la σ-álgebra X en Ω consistente en todos los subconjuntos de Ω. Se define una medida μ en dicho σ-álgebra haciendo $\mu(A) = |A|$ ($|A|$ indica el cardinal de A, es decir, el número de elementos del conjunto) si A es un subconjunto finito de Ω y $\mu(A) = \infty$ si A es un subconjunto infinito de Ω. Entonces, (Ω, X, μ) es un espacio de medida.

La medida de conteo permite traducir muchas afirmaciones sobre los espacios L^P en estructuras mas familiares. Si $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ y S es el espacio de medida con medida de conteo en Ω, entonces $L^p(S)$ coincide con $\mathbb{R}^n$ (o con $\mathbb{C}^n$), con *norma* definida por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

De manera similar, si se toma Ω como el conjunto de números naturales y S es el espacio de medida con la medida de conteo en Ω, entonces $L^P(S)$ consiste en todas las sucesiones $x = (x_n)$ para las cuales

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

es finito. Este espacio se escribe generalmente como ℓ^p.

La medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue[8] es la manera standard de asignar un longitud, área o volumen a subconjuntos de un espacio euclídeo. Se utiliza, en particular, para definir la integración en el sentido de Lebesgue. Aquellos conjuntos a los cuales se les puede asignar un volumen, se denominan medibles Lebesgue. Indicamos con $\lambda(A)$ el volumen o medida de Lebesgue de un conjunto medible A.

Ejemplos

- Si A es un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces su medida de Lebesgue es $b-a$. El intervalo abierto (a, b) tiene la misma medida, dado que la diferencia entre ambos conjuntos tienen medida cero (un punto tiene medida nula).
- Si A es el producto cartesiano de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$, entonces es un rectángulo y su medida de Lebesgue es el área $(b-a)(d-c)$.
- El conjunto de Cantor, es un ejemplo de un conjunto no numerable que tiene medida de Lebesgue cero.

Propiedades

Las medidas de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ poseen las siguientes propiedades:

1. Si A es un producto cartesiano de intervalos $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, entonces A es medible Lebesgue y $\lambda(A) = |I_1| \cdot |I_2| \cdots |I_n|$. Donde $|I|$ indica la longitud del intervalo I.
2. Si A es una unión disjunta de una cantidad finita o numerable de conjuntos disjuntos medibles Lebesgue, entonces A es también medible Lebesgue y $\lambda(A)$ es igual a la suma (o serie infinita) de las medidas de los conjuntos medibles involucrados.
3. Si A es un conjunto medible Lebesgue, también lo es su complemento.
4. $\lambda(A) \geq 0$ para todo conjunto medible Lebesgue A.
5. Si A y B son conjuntos medibles Lebesgue y A es un subconjunto de B (i.e. $A \subset B$), entonces $\lambda(A) \leq \lambda(B)$. (Consecuencia de 2, 3 y 4)
6. Las uniones e intersecciones numerables de conjuntos Lebesgue son medibles Lebesgue. (Consecuencia de 2 y 3)
7. Si A es un subconjunto abierto o cerrado de $\mathbb{R}^n$, entonces A es medible Lebesgue.
8. Si A es un conjunto medible Lebesgue, entonces es "aproximadamente abierto"y "aproximadamente cerrado" en el sentido de Lebesgue (para esto debe verse el teorema de regularidad de las medidas, que escapa al alcance de estas notas).

[8]Henri Léon **Lebesgue** (1875– 1941) fue un matemático francés, famoso principalmente por su teoría de integración. La teoría de integración de Lebesgue fue publicada originalmente en su disertación doctoral "Intégrale, longueur, aire" ("Integral, longitud y área"), en la Universidad de Nancy-Francia, en 1902.

9. La medida de Lebesgue es al mismo tiempo localmente finita e internamente regular, por lo cual es una medida de Radon.

10. La medida de Lebesgue es estrictamente positiva[9], y por lo tanto su soporte es todo $\mathbb{R}^n$.

11. Si A es un conjunto medible Lebesgue, con $\lambda(A) = 0$ (el conjunto nulo), entonces, todo subconjunto de A también es un conjunto nulo.

12. Si A es medible Lebesgue y x es un elemento de $\mathbb{R}^n$, entonces la traslación de A por x definida por $A + x = \{a + x : a \in A\}$, también es medible Lebesgue y tiene la misma medida que A: $\lambda(A + x) = \lambda(A)$.

El listado anterior se pude resumir en el siguiente enunciado:

> La medida de Lebesgue de conjuntos medibles constituye una σ-álgebra que contiene todos los intervalos producto y λ es la única medida completa, invariante por traslaciones en dicho σ-álgebra tal que $\lambda([0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]) = 1$.

La medida de Lebesgue tiene además la propiedad de ser σ-finita.

II.5. Espacios normados

En algebra lineal, análisis funcional y otras áreas de la matemática, la norma es una función que asigna un valor real positivo a cada uno de los vectores del espacio vectorial, que no sea el vector nulo. Una seminorma (o pseudo-norma) en cambio, puede asignar longitudes nulas a vectores que no sean el vector nulo. Ejemplos simples son el espacio euclídeo bidimensional $\mathbb{R}^2$ con la norma Euclídea.

Definición II.15 (Norma) *Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial sobre un subcuerpo F de los números complejos (F puede ser el cuerpo de los números complejos o los números racionales, o los números reales). Se denomina* **seminorma en** V *a una función $\rho : V \to \mathbb{R}$ tal que a cada $x \in V$ le asigna un número real $\rho(x)$, tal que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\rho(v) \geq 0, \quad \forall v \in V$. *(Positividad)*

2. $\rho(av) = |a|\rho(v), \quad \forall a \in F$ *y* $\forall v \in V$. *(Homogeneidad positiva o escalabilidad positiva)*

3. $\rho(u + v) \leq \rho(u) + \rho(v)$ *(Desigualdad triangular o subaditividad).*

---

[9] Una medida es *estrictamente positiva* si no es cero nunca o sólo se anula en puntos.Mas precisamente, se define como sigue:
Sea $(\Omega, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $\mathcal{F}$ un σ-álgebra en Ω que contiene la topología $\mathcal{T}$, de modo que todo conjunto abierto en Ω es medible. Entonces, una medida $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ en Ω se dice **estrictamente positiva** si todo conjunto abierto no vacío $\varnothing \neq U \in \mathcal{T}$ tiene medida positiva $\lambda(U) > 0$.
Por ejemplo, la medida de Dirac, es estrictamente positiva, dependiendo de la topología de Ω. Si damos a $\mathbb{R}$ la topología trivial, $\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$, entonces δ_0 es estrictamente positiva.

La positividad es una consecuencia de los dos últimos axiomas de la definición.
Una norma es una **seminorma** *con la condición adicional que:*

- $\rho(v) = 0$ *sí y sólo si* $v = 0$.*(Definida positiva)*

Una norma habitualmente se indica como $||v||$ *en lugar de* $\rho(v)$.

Definición II.16 (Espacio normado) *Se denomina* **espacio vectorial semi-normado** *al par* (V, ρ)*, donde* V *es un espacio vectorial y* ρ *una seminorma en* V.
Se denomina **espacio vectorial normado** *(o espacio normado) al par* $(V, ||.||)$*, donde* V *es un espacio vectorial y* $||.||$ *una norma en* V.

Notación: Suele omitirse ρ o $||.||$ y referirse sólo al "espacio (semi)normado V", quedando claro del contexto cual es la (semi)norma considerada.

Aún cuando todo espacio vectorial es seminormado, con la seminorma trivial ($\rho(x) = 0 \quad \forall x \in V$), pero no tiene por que ser normado. Todo espacio vectorial V con seminorma ρ puede convertirse en normado construyendo el espacio cociente V/W, donde W es el subespacio de V consistente en todos los vectores $v \in V$ tales que $\rho(v) = 0$. La norma inducida en V/W está dada por $||W + v|| = \rho(v)$ y se puede verificar que está bien definida. Por mas detalles, sobre espacio cocientes, consultar bibliografía de Algebra Abstracta.

Si ρ es una seminorma, vale que

$$\rho(u \pm v) \geq |\rho(u) - \rho(v)|,$$

para todo $u, v \in V$. Además, toda norma es una seminorma.

II.5.1. Ejemplos

- La *seminorma trivial*: $\rho(v) = 0$ para todo $v \in V$.
- El valor absoluto es una norma en $\mathbb{R}$.
- Toda forma lineal $f : V \to \mathbb{R}$ en un espacio vectorial V define una seminorma en V haciendo $\rho(x) = |f(x)|$.
- Las *normas Euclídeas* en $\mathbb{R}^n$:

  $$||x|| := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{1/2} , \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n$$

  y en $\mathbb{C}^n$:

  $$||z|| := \left\{ \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \right\}^{1/2} , \quad \text{para } z \in \mathbb{C}^n$$

- En un espacio con producto interno, la norma inducida por el producto interno

  $$||x||^2 :=< x, x > .$$

- La *norma-1*:

$$||x||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

también denominada norma Manhattan.

- La *norma-p*, para $p \geq 1$, en $\mathbb{R}$:

$$||x||_p := \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right\}^{1/p},$$

Ver que la norma Euclídea y la norma 1 son casos particulares (Ver también los espacios L^p en sec II.6).

- La *norma infinito* o *norma máximo*:

$$||x||_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} (|x_i|).$$

II.6. Espacios de Banach

Los espacios de Banach son uno de los objetos centrales de estudio del *análisis funcional* y son así denominados en honor al matemático polaco (ex Austria-Hungría) Stefan Banach[10] quien las estudió. Muchos de los espacios funcionales de dimensión infinita estudiados en este área de la matemática son ejemplos de espacios de Banach.

Definición II.17 (Espacio vectorial normable) *Un espacio vectorial topológico se dice* **normable** *(seminormable) si la topología del espacio puede ser inducida por una norma (seminorma).*

Definición II.18 (Espacios de Banach) *Los* **espacios de Banach** *son espacios vectoriales normados completos. Sea $(V, +, *)$ un espacio vectorial sobre el campo de los números reales o de los números complejos, con una* norma $||.||$ *y la métrica inducida por ella en V: $d(x, y) = ||x - y||$. Se dice que $V(+, *, ||.||)$ es un espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy es convergente en V (y lo hace a un elemento de V).*

Observar que dado que la norma induce una topología en el espacio vectorial, un espacio de Banach es un ejemplo de un espacio vectorial topológico.

[10]Stefan **Banach** (1892–1945) fue un matemático polaco quien trabajó en Polonia y en la Ucrania soviética. Matemático prodigio autodidacta, Banach fue el fundador del moderno *análisis funcional*. Entre sus trabajos más destacados se encuentra el libro de 1932,“Théorie des opérations linéaires” (Teoría de las operaciones lineales), primera monografía sobre la teoría general de espacios métricos lineales.

II.6.1. Ejemplos

Sea K el cuerpo de los números reales o el de los números complejos.

- Los espacios euclídeos de dimensión n, K_n, donde la norma de $x = (x_1, ..., x_n)$ es la norma cuadrática usual $||x|| = (\sum_{i=1}^{n} |xi|^2)^{1/2}$, son espacios de Banach.

- El espacio de todas las funciones continuas $f : [a, b] \to K$ definidas en un intervalo real cerrado $[a, b]$ es un espacio de Banach bajo la *norma supremo*, definida por $||f|| = sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Esta es efectivamente una norma, dado que las funciones continuas definidas en intervalos cerrados son acotadas. El espacio es completo bajo esta norma y el espacio de Banach resultante se indica $\mathcal{C}([a, b])$.

  Este ejemplo puede generalizarse a $\mathcal{C}(X)$ de todas las funciones continuas de X en K, donde X es un espacio compacto, o en el espacio de todas las funciones acotadas de X en K, donde X es cualquier espacio topológico, o en el espacio $B(X)$ de todas las funciones acotadas de X en K, cuando X es cualquier conjunto. En cualquiera de estos casos, podemos multiplicar funciones y el producto está en el mismo espacio (es decir, la operación es cerrada), haciendo que todos estos sean ejemplos también de lo que se denominan *álgebras de Banach*.

- Si $p \geq 1$ es un número real, consideramos el espacio de todas las sucesiones (infinitas) $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de elementos de K tales que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ sea convergente (i.e. sea finita). Se define la *norma-p* de la sucesión x como

$$||x||_p = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right]^{1/p} .$$

  El espacio de todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de elementos de K tales que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ sea convergente, dotado de la norma-p es un espacio de Banach y se lo indica l^p.

- El espacio de todas las sucesiones acotadas de elementos en K es el espacio de Banach l^∞ con la norma del supremo: $||x||_{sup}$, es decir, el supremo de los valores absolutos de los elementos de la sucesión, para $n = 1, \ldots, \infty$.

- Si $p \geq 1$ es un número real, se puede considerar el conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \to K$ tales que $|f|^p$ es *integrable Lebesgue* (Ver pág. 34). Se define la *norma-p* de f como

$$||f||_p = \left[\int_{[a,b]} |f(x)|^p \, d\mu(x)\right]^{1/p} . \qquad \text{(II.5)}$$

  Este espacio no es en si mismo un espacio de Banach porque existen funciones no idénticamente nulas cuya norma-p es cero $||f||_p = 0$. Sin embargo, si se define una *clase de equivalencia* entre aquella funciones f y g cuya diferencia tienen norma-p igual a cero, $||f - g||_p = 0$, entonces el conjunto de las clases de equivalencia constituye un espacio de Banach que se indica con $L^p[a, b]$ y se habla del *espacio* L^p.

Nota Aquí es importante observar que la integral utilizada es la integral de Lebesgue, dado que con la de Riemann[11] no se obtiene un espacio completo.

- Si X y Y son dos espacios de Banach, su suma directa $X \oplus Y$ también es un espacio de Banach.
- Todo *producto interno* da lugar a una norma asociada. Un espacio vectorial con producto interno se llama un *espacio de Hilbert* si su norma asociada es completa. Por lo tanto, todo espacio de Hilbert es, por definición, un espacio de Banach. El recíproco no siempre es cierto.

En la Biblioteca de la Fac. de Ingeniería de la UNER se encuentran los siguientes títulos: [3; 4; 5; 7]

Bibliografía

[1] S. G. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Pr, Cambridge, 1999. 8

[2] Wikipedia, October 2006. `http://es.wikipedia.org/wiki/`. 8

[3] Juan A. Gatica. *Introducción a la Integral de Lebesgue en la Recta*. Number 18 in Programa regional de desarrollo científico y tecnológico. Washington : OEA. Secretaría general, 1977. 27

[4] J. Horváth. *Introducción a la topología general*. Number 9 in Programa regional de desarrollo científico y tecnológico. Washington : OEA. Secretaría general, 1975. 27

[5] J. Nieto. *Introducción a los espacios de Hilbert*. Number 19 in Programa regional de desarrollo científico y tecnológico. Washington : OEA. Secretaría general, 1978. 27

[6] Wikipedia, October 2006. `http://en.wikipedia.org/wiki/Sigma-algebra`. 15, 18

[7] H. Wilcox and D.L. Myers. *An introduction to Lebesgue integration and Fourier series*. Applied Mathematics Series: Mathematics for engineering and science. R. Krieger Publishing co., NY, 1978. (Courier Dover Publications, 1995, ISBN:0486682935). 27

[11] George Friedrich Bernhard **Riemann** (1826– 1866) fue un matemático alemán muy influyente que realizó importantes contribuciones al análisis y a la geometría diferencial

Capítulo III

Teoría de la medida e integral de Lebesgue

En los textos avanzados y artículos científicos de uso corriente en ingeniería es frecuente encontrar referencia a funciones medibles, a la integral de Lebesgue y a funciones de L^1, L^2 o L^p. Es por ello que en este capítulo trataremos de presentar algunas de las nociones básicas relativas a estos conceptos. Nuevamente aclaramos que no tratamos de realizar un desarrollo profundo, sino que, siguiendo diversos textos y páginas de internet, solamente presentamos conceptos y explicaremos las ideas centrales de modo tal que sean fácilmente comprendidas para poder abordar con posterioridad la lectura comprensiva del material específico. Esto no reemplaza de modo alguno los libros específicamente destinados a desarrollar en profundidad cada una de estas temáticas, algunos de los cuales están mencionados en la bibliografía.

En matemática, la integral de una función no negativa puede mirarse, en el caso más simple, como el área comprendida entre el gráfico de dicha función y el eje de las abscisas (eje x). La integración de Lebesgue es una construcción matemática que extiende la noción de integral a una clase de funciones más amplia; también extiende el dominio en el cual dichas funciones pueden estar definidas y que usa la medida y el concepto de "en casi todas partes" o de "para casi todo punto".

Se entiende que para funciones no negativas, con un gráfico suficientemente suave, tales como las funciones continuas en intervalos acotados cerrados, el área bajo la curva puede definirse como la integral y calculada mediante la técnica aproximación de la región mediante polígonos. De todos modos, cuando surge la necesidad de considerar funciones mas generales (por ejemplo, como resultado del proceso de límite del análisis matemático y en la teoría matemática de probabilidad) queda claro que es necesario disponer de técnicas de aproximación mas cuidadosas para poder definir adecuadamente la integral.

La integral de Lebesgue juega un rol importante en la rama de la matemática denominada *análisis real* y en muchos otros campos de las ciencias matemáticas.

La integral de Lebesgue se denomina de este modo en honor al matemático francés Henri León Lebesgue (1875-1941).

III.1. Aspectos históricos

Como dijéramos, la integración es una operación matemática que se corresponde informalmente con la idea de encontrar el área bajo el gráfico de una función. La primera teoría de integración fue desarrollada por Arquímedes en el siglo 3 (aC), con el denominado método de cuadraturas, pero pudo aplicarse sólo a un número limitado de casos con un alto grado de simetrías geométricas. En el siglo XVII, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibnitz descubrieron, independientemente, que la integración era por así decirlo, la operación inversa de la derivación y sentaron las bases de lo que hoy es el cálculo diferencial e integral. La contribución principal de ambos fue el Teorema Fundamental del Cálculo. Proporcionaron los elementos simbólicos básicos para los posteriores desarrollos de la matemática y física moderna. Sin embargo, a diferencia del método de Arquímedes, que se basaba en la geometría Euclideana, el método propuesto por Newton y Leibnitz no tenía bases rigurosas.

En el siglo XIX, Augustín Cauchy desarrolló finalmente una teoría rigurosa de límite, y Bernhard Riemann (1826-1866) la continuó formalizando, dando lugar a lo que hoy es conocido como la integral de Riemann, que se aprende en los cursos de cálculo elemental. Para definir esta integral, se cubre el área bajo el gráfico de la función con rectángulos de tamaño cada vez menor y se toma el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos en cada etapa. Sin embargo, para algunas funciones, el área total de dichos rectángulos no tiene limite (i.e. no se aproxima a un número), y por lo tanto no poseen integral de Riemann.

Dos ejemplos simples de funciones que no son integrables Riemann son son las funciones $1/x$ en el intervalo real $[0, b]$ y la $1/x^2$ en cualquier intervalo que contenga al cero. Son intrínsecamente no integrables, dado que el área que la integral de Riemann debería representar es infinita. En otros ejemplos, el integrando posee muchas discontinuidades. Un ejemplo extremo de esta situación es la función característica de los números racionales (ver mas adelante).

Si consideramos el área bajo la curva definida por $1/x$ en un intervalo entre $-a$ y b para a y b positivos, el área será $+\infty$ a ambos lados de 0. Sin embargo, es posible definir el área en este caso y obtener el área neta por límite, haciendo $\int_{-a}^{-d} 1/x\,dx + \int_{d}^{b} 1/x\,dx$, para $d > 0$ y tomando el limite para $d \to 0$. En este caso hemos calculado el *valor principal de la integral* que se indica con (VP) $\int_{-a}^{b} 1/x\,dx$[1]. Esto es posible para funciones como la $1/x$ cuyas áreas infinitas tienen igual magnitud y signos opuestos en parte del intervalo de integración y pueden cancelarse mutuamente.

En 1907 Lebesgue [5] propuso un nuevo método de integración para resolver este tipo de problemas. En lugar de utilizar las áreas de rectángulos, que pone la atención en el dominio de la función, Lebesgue buscaba en el codominio de la función su unidad fundamental de área. La idea de Lebesgue era construir primero la integral para lo que denominaba *funciones simples, funciones medibles* que sólo tomaran un número finito de valores. Luego la definió para funciones más complicadas, como la menor cota superior de todas las integrales de funciones simples que fueran menores que la función en cuestión.

La integral de Lebesgue tiene la propiedad de que toda función que posea integral de Riemann también es integrable según Lebesgue y para dichas funciones, ambas integrales coinciden. Pero existen muchas funciones que son integrables según Lebesgue, pero no poseen

[1]Recuerde que el valor principal de Cauchy para una integral impropia en el eje real, está definido por (VP) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}[\int_{-b}^{+b} f(x)\,dx]$, para $b > 0$.

integral Riemann.

Una manera didáctica de entender la diferencia entre la integral de Riemann y la de Lebesgue, fue propuesta por el mismo Lebesgue. Supongamos que tenemos una canasta con billetes de \$5, \$10, \$20, \$50 y \$100 y deseamos saber cuanto dinero tenemos. Podemos contar el dinero de dos formas diferentes:

a) Sacamos los billetes de a uno y vamos sumando sus valores;

b) Agrupamos los billetes por su valor y contamos cuantos tenemos en cada grupo, multiplicando luego dicha cantidad por el valor correspondiente y sumamos todo.

Aunque ambas formas de contar nos va a dar el mismo resultado, es claro que la segunda es más eficiente que la primera. La primera forma se corresponde con la idea de cómo se calcula la integral de Riemann y la segunda con la de Lebesgue. Sin embargo, para funciones que no sean escalonadas (es decir, que no sean de las denominadas *funciones simples*), no es evidente que el método de Lebesgue de el mismo resultado que el de Riemann.

Como parte de los desarrollos integrales de Lebesgue, el matemático inventó el concepto de *medida de Lebesgue*, que extiende la idea de longitud de los intervalos a una clase mucho más grande de conjuntos, denominados *conjuntos medibles* (por lo tanto, las funciones simples son funciones que toman sólo un número finito de valores y cada valor se toma en un conjunto medible). La técnica de Lebesgue para ajustar una medida en una integral se generaliza fácilmente a muchas otras situaciones, dando lugar al campo de la matemática conocido como *Teoría de la medida.*

III.2. Limitaciones de la integral de Riemann

La integral de Riemann sólo esta definida en intervalos acotados y su extensión a intervalos infinitos sólo se puede realizar como una integral impropia, haciendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\, dt.$$

Pero esta extensión no funciona de manera apropiada. Una propiedad básica, la invariancia por traslaciones, no es satisfecha. ¿Qué quiere decir esto?. La integral Riemann de una función no debería cambiar si se traslada la función hacia la derecha o hacia la izquierda. Por ejemplo, sea $f(x) = 1$ para $x > 0$, $f(0) = 0$, y $f(x) = -1$ para $x < 0$. Entonces,

$$\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = \int_{-x}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{x} f(t)\, dt = -x + x = 0$$

para todo x. Pero, si trasladamos $f(x)$ hacia la derecha una unidad para tener $f(x-1)$, resulta

$$\int_{-x}^{x} f(t-1)\, dt = \int_{-x}^{1} f(t-1)\, dt + \int_{1}^{x} f(t-1)\, dt = -(x+1) + (x-1) = -2$$

para todo $x > 1$.

Como esto no es aceptable, podemos intentar otra alternativa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt.$$

Sin embargo, si tratamos de integrar la función anterior de esta forma, obtenemos $+\infty$, dado que tomamos primero el limite para b tendiendo a infinito. Si cambiamos el orden de los límites, tenemos $-\infty$.

Observamos que para que exista la integral, deberíamos obtener el mismo valor, independientemente del orden.

Otro problemas es que la integral de Riemann no conmuta con límites uniformes. Por ejemplo, si consideramos $f_n(x) = 1/n$ en el $[0, n]$ y 0 para cualquier otro x, tendremos que para todo n, $\int_{\Re} f_n\,dx = 1$. Por otra parte f_n converge uniformemente a cero, entonces la integral de $\lim f_n$ es cero. En consecuencia $\int f\,dx \neq \lim \int f_n\,dx$. Esto muestra que el importante criterio de intercambio de los signos de limite y de integral (propia) es falso cuando trabajamos con integrales impropias, haciendo a la integral Riemann no apropiada para muchas aplicaciones.

III.3. La integral de Lebesgue

La integral de una función f entre los límites a y b puede interpretarse como el área bajo del gráfico de f. Esto es fácil de interpretar en funciones como polinomios, pero no es tan intuitivo para funciones más raras. En general, ¿para qué tipo de funciones es que tiene sentido pensar en el “área bajo la curva”?. La respuesta a esta pregunta posee importancia teórica y práctica.

Recordemos que, conceptualmente, la integral de Riemann (conocida como la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$) lo que hace es construir una sucesión de integrales de fácil cálculo que convergen a la integral de la función dada. Esta definición es exitosa en el sentido que proporciona respuesta a muchos problemas ya resueltos y da resultados útiles para muchos otros problemas.

Sin embargo, la integración de Riemann, no interactúa adecuadamente cuando, al tomar los límites de las sucesiones de funciones, el proceso se torna complicado de analizar. De principal importancia son, por ejemplo, en el estudio de las series de Fourier, en las transformadas de Fourier y otros temas. La integral de Lebesgue describe mejor cómo y cuándo es posible tomar límites bajo un signo de integral. La definición de Lebesgue considera una clase diferente de integrales, de fácil cálculo y permite calcular la integral de un espectro más amplio de funciones que la integral de Riemann. Así por ejemplo, la función de Dirichlet (la función característica de los números racionales Q), que vale 1 cuando el argumento es racional y 0 para cualquier otro valor, posee integral de Lebesgue, pero no posee integral de Riemann [2].

Como recordará, la integral de Riemann de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se construye particionando el intervalo $[a, b]$ en sub-intervalos $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ y aproximando el valor de la función f en cada intervalo por un valor constante $f(\xi_k^*)$, donde $\xi_k^* \in I_k$. Entonces, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$

[2] Puede ver la demostración de que no posee integral de Lebesgue en [4] la página 33

se obtiene por aproximación, como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos cuyas bases se corresponden con los intervalos I_k cuyas alturas son las correspondientes constantes, por exceso y por defecto, $f(\xi_k^*)$.

Esta idea de ir cortando en rebanadas el área bajo el gráfico de una función f es natural y puede realizarse de dos maneras posibles: una es como se hace para calcular la integral de Riemann, es decir con rebanadas paralelas al eje de las abscisas; la otra es cortando en forma paralela al eje de las ordenadas. Esta última forma fue la adoptada por Lebesgue. Es así que conforme a Lebesgue, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, puede pensarse como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \approx \sum_{y\in\mathbb{R}} y. \begin{Bmatrix} \text{medida de los valores de } x \\ \text{para los cuales } f(x)=y \end{Bmatrix}.$$

Observe que, la colección de los "valores de x para los cuales $f(x)=y$" no es otra cosa que:

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \{y\}\}.$$

Es por ésto que en la teoría de la integral de Lebesgue es de principal importancia la medida de conjuntos del tipo $f^{-1}(A)$, siendo $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto en el eje y.

Obsérvese que para calcular la integral de Riemann de una función es necesario que esta tenga variaciones suaves. Esto no es necesario para la integral de Lebesgue (ver, mas adelante, ejemplo III.4.4).

III.4. Construcción de la integral de Lebesgue

En esta sección presentaremos una introducción a los principales conceptos y propiedades de la integral de Lebesgue, distinguiendo dos partes:

1. Teoría de conjuntos medibles y medidas de dichos conjuntos.

2. Teoría de funciones medibles e integración de dichas funciones.

III.4.1. Teoría de la medida

La *teoría de la medida* fue creada originalmente para permitir un análisis detallado de la noción de longitud de subconjuntos de una recta real y más generalmente, de los conceptos de área y volumen de subconjuntos en espacios Euclídeos. Proporciona una forma sistemática de responder a la pregunta sobre qué subconjuntos de $\mathbb{R}$ tienen una longitud. En los desarrollos posteriores de teoría de conjuntos se mostró que es imposible asignar una longitud a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, de modo tal que se preserven las propiedades naturales de aditividad e invariancia por traslaciones. Esto sugiere que es un requisito esencial el tomar una clase adecuada de subconjuntos medibles.

La integral de Riemann implícitamente utiliza la noción de longitud. En efecto, el elemento de cálculo de la integral de Riemann es el rectángulo $[a,b]\times[c,d]$, cuyo área se calcula como $(b-a)(d-c)$. La cantidad $b-a$ es la longitud de la base del rectángulo y $d-c$ es la altura del rectángulo. Riemann podía sólo utilizar rectángulos planos para aproximar el área bajo una curva dado que no existía una teoría adecuada para medir conjuntos mas generales.

En el desarrollo de la teoría en textos modernos (a partir de 1950), el enfoque de medida e integración es axiomático. Esto quiere decir que una medida es cualquier función μ definida en ciertos subconjuntos E de un conjunto X que satisfaga ciertas propiedades, tal como se vio en la sec. II.9. Se puede demostrar que dichas propiedades se verifican en muchos casos diferentes.

Un ejemplo claro es un espacio de probabilidad, que describe nuestra incertidumbre sobre cierto experimento y consiste en el espacio muestral de las posibles salidas y una *medida de probabilidad* que cuantifica cuantas chances tiene de salir cada uno de ellos. Un evento es un conjunto de salidas del experimento. La medida de probabilidad obedece tres axiomas: es no negativa, su suma (o integral) es la unidad (normalización) y es aditiva para eventos disjuntos.

La teoría de los *conjuntos medibles* y de las *medidas* (incluyendo definiciones y construcción de las mismas) puede encontrarse en [6; 7; 8; 9].

III.4.2. Integración

Trabajaremos en el siguiente contexto abstracto:

- Σ es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X (ver def. II.8).
- μ es una medida no negativa en X.

Por ejemplo, X es un espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ o cierto subconjunto medible Lebesgue, X es el $\sigma-$álgebra de todos los subconjuntos medibles Lebesgue de Σ, y μ es una medida de Lebesgue. En teoría de probabilidad, μ sería una medida de probabilidad del espacio de probabilidades X.

En la teoría de Lebesgue, las integrales están limitadas a la clase de funciones llamadas *funciones medibles*.

Se puede demostrar que la definición de función medible (def. II.11) es equivalente a requerir que la pre-imagen de cualquier subconjunto Borel de $\mathbb{R}$ esté en Σ. El conjunto de funciones medibles es cerrado bajo operaciones algebraicas. El límite puntual de sucesiones:

$$\liminf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \limsup_{k\in\mathbb{N}} f_k$$

es medible si la sucesión original $\{f_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$, consiste en funciones medibles.

Construimos una integral

$$\int_X f d\mu$$

para funciones medibles a valores reales f definidas en X en tres pasos:

- **Funciones característica**:
  Para asignar un valor a la integral de una función característica[3] de un conjunto medible S consistente con una medida dada μ, se elige:

$$\int \chi_S \, d\mu = \mu(S)$$

[3]La función característica de S se indica como 1_S o como χ_S (Chi sub S) y se define como $\chi_S(x) = 1$ si $x \in S$ y $\chi_S(x) = 0$ si $x \notin S$.

- **Funciones simples**[4]:
  Extendemos por linealidad la definición anterior:

$$\int \left(\sum_k a_k \chi_{S_k} \right) d\mu = \sum_k a_k \int \chi_{S_k} d\mu,$$

  donde la suma es finita y los coeficientes a_k son números reales. Aún cuando una función simple puede escribirse de diferentes maneras como combinación lineal de funciones características, puede demostrarse que la integral simple será la misma.

- **Funciones no negativas**:
  Sea f una función medible no negativa en X que puede tomar el valor $+\infty$, es decir, que toma valores en el semieje real positivo extendido. Definimos

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : s \leq f, \ s \text{ simple} \right\}$$

  Se demuestra que esta integral coincide con la precedente para el caso particular en que f sea una función simple. Además, coincide con la integral de Riemann si f es integrable Riemann.

  Para algunas funciones $\int_E f \, d\mu$ podrá ser infinito.

- **Funciones con signo**:
  Para trabajar con funciones con signo necesitamos mas definiciones.

  Si f es una función definida en un conjunto medible X (incluyendo $\pm\infty$), entonces se puede escribir:

$$f = f^+ - f^-,$$

  donde

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if} \quad f(x) > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{if} \quad f(x) < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  Observar que, tanto f^+ como f^- son funciones no negativas. Obsérvese también que

$$|f| = f^+ + f^-.$$

  Si

$$\int |f| d\mu < \infty,$$

  entonces se dice que f *es integrable Lebesgue*. En este caso, ambas integrales satisfacen

$$\int f^+ d\mu < \infty, \quad \int f^- d\mu < \infty,$$

[4] Se define como funciones simples aquellas que pueden escribirse como una combinación lineal finita de funciones características de conjuntos disjuntos.

y tiene sentido definir:

$$\int f d\mu = \int f^{+} d\mu - \int f^{-} d\mu.$$

Es claro que las definiciones anteriores dan a la integral de Lebesgue todas las propiedades deseables. En el caso de funciones a valores complejos, basta considerar la parte real y la parte imaginaria, de manera separada.

III.4.3. Interpretación intuitiva

Para lograr cierta intuición sobre los diferentes aspectos de la integración, supongamos que se desea encontrar el volumen de una montaña sobre el nivel del mar y que las fronteras de la montaña están claramente marcados (serán la región de integración)

El enfoque de Riemann (o Riemann-Darboux): cortar la montaña en torres verticales, cada una con base cuadrada al nivel de mar. Tomar un par de puntos dentro de ese cuadrado, uno donde la altura sea máxima y otro donde sea mínima. Asociar a esas alturas los volúmenes por exceso y por defecto obtenidos al multiplicar las alturas por el área del cuadrado de la base. La suma Riemann por exceso es la suma de los volúmenes de las torres por exceso y de modo similar se tiene la suma Riemann por defecto. Si las sumas por exceso y por defecto convergen a un mismo valor, a medida que el lado de los cuadrados decrece a cero, entonces se dice que existe la integral de Riemann.

El enfoque Lebesgue: Dibuje un mapa de nivel de la montaña con tantas líneas de nivel como sea posible. Para cada contorno (o conjunto de nivel) con mínima altura, encuentre el área total encerrada (dentro de ese mapa) por ese conjunto de niveles, es decir encuentre la “medida”de ese conjunto de niveles. Multiplique dicha medida por la altura representada por el conjunto de niveles: el producto será un sumando de la “suma de Lebesgue”.

Luego encuentre el nivel o conjunto de niveles que están a la altura siguiente (menor altura de los niveles restantes). Calcule la medida del área encerrada por ellos. Multiplique la medida por la diferencia en altura con respecto al nivel anterior. Dicho producto será otro sumando de la “suma de Lebesgue”.

Repita este procedimiento para sucesivos niveles de contorno, cada vez mas altos, hasta que haya procesado el nivel de contorno más elevado. La suma resultante será el generado lineal: cada contorno corresponde a una función característica (del correspondiente conjunto de nivel).

La suma puede definirse sumando los contornos inmediatos: dividiendo por la mitad las diferencias entre alturas sucesivas y recalculando la suma. La integral de Lebesgue es el limite de dicho proceso.

III.4.4. Ejemplo

Considere la función característica de los números racionales χ_Q. Se sabe que χ_Q no es continua en ninguna parte y no es derivable.

- χ_Q no es integrable Riemann en $[0, 1]$:
  Cualquier partición del $[0, 1]$ en subintervalos contiene al menos un número racional y al menos un número irracional, dado que tanto el conjunto de números racionales

como el de irracionales son *densos*[5] en el conjunto de los números reales. Entonces las sumas superiores serán todas iguales a 1 y las por defecto serán todas iguales a cero. Por lo tanto, al no coincidir las integrales superiores (por exceso) con las inferiores (por defecto), no existe la integral en el sentido Riemann de la función χ_Q.

- χ_Q es integrable Lebesgue en $[0,1]$: En efecto, dado que los números racionales son numerables en el $[0,1]$, se tiene que

$$\int_{[0,1]} \chi_Q \, d\mu = \mu(Q \cap [0,1]) = 0.$$

- Consideremos la función f que vale 1 para los racionales y -1 para los irracionales en el $[0,1]$. Esta función es integrable Lebesgue en el $[0,1]$.
  En efecto, observando que f toma sólo dos valores 1 y -1, basta calcular la medida de los conjuntos $Q \cap [0,1]$ y $Q^c \cap [0,1]$ (donde con Q^c indicamos $\mathbb{R} - Q$), de los racionales y de los irracionales en el $[0,1]$, respectivamente. Pero la teoría de los números reales indica que en el intervalo $[0,1]$ existe una cantidad numerable de números racionales, y cada número racional constituye un "intervalo" de longitud nula (por tener sólo 1 elemento), por lo tanto, la medida Lebesgue de $Q \cap [0,1]$ es cero. La medida Lebesgue del $[0,1]$ es uno y dado que $Q^c \cap [0,1] = [0,1] - Q \cap [0,1]$ y ambos intervalos son disjuntos, se tiene que la medida del $Q^c \cap [0,1]$ es 1. Por lo tanto:

$$\int_{[0,1]} f(x) \, dx = (1).\mu(Q \cap [0,1]) + (-1).\mu(Q^c \cap [0,1]) = (1)\, 0 + (-1)\, 1 = -1.$$

III.5. Más limitaciones de la integral de Riemann

Con el advenimiento de las series de Fourier, surgieron a la luz diferentes problemas relacionados con las integrales, cuya solución satisfactoria requería intercambiar los signos de sumatorias infinitas de funciones y los de integración. Aparecieron dificultades relacionadas con las condiciones bajo las cuales las integrales

$$\sum_k \int f_k(x)dx \quad \text{y} \quad \int \left[\sum_k f_k(x) \right] dx$$

eran iguales en el contexto Riemann. Existen también otras dificultades técnicas con la integral de Riemann,vinculadas con el limite.

- **Falla en la convergencia monótona** Tal como se mostrara antes, la función característica de los racionales χ_Q no es integrable Riemann. En particular falla el teorema

[5] Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice *denso en* X si, intuitivamente, cualquier punto en X puede ser "bien aproximado" por puntos en A. Formalmente, A es denso en X si para cualquier punto $x \in X$, cualquier entorno de x contiene al menos un punto de A.

de la convergencia monótona[6]. Para verlo, consideremos $\{a_k\}$ una sucesión de números racionales en $[0,1]$. Sea

$$g_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = a_k \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Entonces, hagamos

$$f_k = g_1 + g_2 + \ldots + g_k.$$

La función f_k es cero en todo punto, excepto en un conjunto finito de puntos; entonces su integral Riemann es cero. La sucesión f_k también es claramente no negativa y monótonamente decreciente[7] a χ_Q, que no es integrable Riemann.

- **Inadecuación de los intervalos no acotados**
  La integral de Riemann sólo puede integrar funciones en intervalos acotados. La extensión mas simple consiste en definir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{+a} f(x)dx$$

  cuando los límites existen. De todos modos, esto destruye la deseable propiedad de invarianza ante traslaciones [8]. Con esta definición de la integral impropia (denominada el *valor principal de Cauchy de la integral impropia entorno al cero*), las funciones $f(x) = (1 \text{ si } x > 0, -1 \text{ para otro valor})$ y $g(x) = (1 \text{ si } x > 1, -1 \text{ para otro valor})$ son traslaciones una de la otra y sin embargo sus integrales impropias son diferentes:

$$\int f(x)dx = 0, \quad \int g(x)dx = -2.$$

III.6. Teoremas integrales básicos

La integral de Lebesgue no distingue entre funciones que sólo difieren en un conjunto de $\mu-$medida nula.

Definición III.1 *Sean f y g dos funciones definidas sobre un subconjunto de un espacio medible E. Se dice que f y g son* iguales para casi todo punto *y se indica $f = g$ pctp (o a.e., del inglés* almost every where*), si y sólo si $\mu(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.*

[6]Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles a valores reales en un espacio medible S. Si la sucesión converge *para casi todo punto* en S y es dominada por una función no negativa $g \in L^1$, entonces $\int_S \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n$.
Decir que la sucesión es "dominada" por g, equivale a decir que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo n y *para casi todo* x.
Decir que cierta propiedad vale *para casi todo* x equivale a decir que el conjunto de los puntos x donde no se verifica dicha propiedad tiene medida cero.
Decir que $g \in L^1$, significa que $\int_S |g| < \infty$.

[7] La sucesión $\{f_k\}$ es *monótonamente decreciente* si $f_{k+1} \leq f_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Es monótonamente decreciente a χ_Q si a $f_k \geq \chi_Q$, $\forall\, k$ y además $\lim_{k\to\infty} f_k = \chi_Q$

[8]Sean f y g nulas fuera de un intervalo $[a,b]$ e integrables Riemann. Se dice que la integral es invariante ante traslaciones si $f(x) = g(x+y)$ para algún y, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$

Teorema III.1

Si f y g son funciones no negativas (que pueden tomar valores $\pm\infty$) tales que $f = g$ pctp., entonces $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$.

Teorema III.2

Si f y g son tales que $f = g$ pctp., entonces f es integrable si y sólo si g es integrable y $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$.

III.6.1. Propiedades

La integral de Lebesgue posee las siguientes propiedades:

Linealidad

Si f y g son funciones integrables y a y b son números reales, entonces $af + bg$ es integrable y

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f\, d\mu + b \int g\, d\mu$$

Monotonía

Si $f \leq g$, entonces

$$\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu.$$

Teorema III.3 (Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue) *Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas tales que:*

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$\lim_k \int f_k\, d\mu = \int \sup_k f_k\, d\mu.$$

Observación: El valor de cualquiera de las integrales puede ser infinito.

Lema III.1 (Lema de Fatou) *Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Si $f = \liminf f_k$, entonces*

$$\int f\, d\mu \leq \liminf_k \int f_k\, d\mu.$$

Nuevamente, el valor de cualquiera de las integrales puede ser infinito.

Teorema III.4 (Teorema de la convergencia Dominada de Lebesgue) *Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles con límite puntual f. Si existe una función integrable g tal que $|f_k| \leq g$ para todo k, entonces f es integrable y*

$$\lim_k \int f_k d\mu = \int f d\mu.$$

III.7. Técnicas de demostración

Para ilustrar algunas de las técnicas de demostración utilizadas en la teoría integral de Lebesgue, bosquejaremeos la demostración del teorema de la convergencia monótona de Lebesgue (Teorema III.3).

Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas y sea

$$f = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k.$$

Por la propiedad de monotonía de la integral, se tiene que:

$$\int f d\mu \geq \lim_k \int f_k d\mu,$$

y el límite de la derecha existe por la monotonía de la sucesión $\{f_k\}$.

Probaremos ahora la desigualdad en el sentido contrario (que también resulta del Lema de Fatou), esto es

$$\int f d\mu \leq \lim_k \int f_k d\mu.$$

De la definición de integral resulta que existe una sucesión no decreciente $\{g_n\}$ de funciones simples no negativas que convergen puntualmente *pctp* a f y tales que:

$$\lim_k \int g_k d\mu = \int f d\mu.$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\int g_k d\mu \leq \lim_j \int f_j d\mu.$$

Mostremos que si g es una función simple y

$$\lim_j f_j(x) \geq g(x) \quad \text{pctp},$$

entonces

$$\lim_j \int f_j d\mu \geq \int g d\mu.$$

Partiendo la función g en partes de valores constantes, esto se reduce al caso en que g es la función característica de un conjunto. Por lo tanto, basta demostrar que:

Proposición III.1 *Sea X un conjunto medible y sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión no decreciente de funciones medibles en Σ tales que*

$$\lim_n f_n(x) \geq 1 \quad \textit{pctp} \quad x \in X.$$

Entonces,

$$\lim_n \int_X f_n d\mu \geq \mu(X).$$

Para demostrar este resultado, fije $\epsilon > 0$ y definamos la sucesión de conjuntos medibles

$$B_n = \{x \in X : f_n(x) \geq 1 - \epsilon\}.$$

Por la monotonía de la integral, sigue que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(B_n)(1-\epsilon) = \int (1-\epsilon)\chi_{B_n} d\mu \leq \int f_n d\mu.$$

Por hipótesis de construcción:

$$\bigcup_i B_i = X,$$

salvo un conjunto de medida nula. Entonces, por ser μ una medida, es numerablemente aditiva y entonces:

$$\mu(X) = \lim_n \mu(B_n) \leq \lim_n (1-\epsilon)^{-1} \int_X f_n d\mu.$$

Como esta propiedad vale para cualquier número positivo ϵ, sigue la tesis.

III.8. Formulaciones alternativas

Si f es no-negativa, entonces $\int f d\mu$ es precisamente el área bajo la curva medida con la medida producto $\mu \times \lambda$, donde λ es la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$.

Se puede intentar esquivar la teoría de medida. La integral de Riemann existe para cualquier función continua f de soporte compacto. Entonces, utilizamos *análisis funcional* para obtener la integral de funciones mas generales.

Sea C_c el espacio de todas las funciones continuas a valores reales, con soporte compacto[9]en $\mathbb{R}$. Definamos la norma en C_c por:

$$\|f\| = \int |f(x)| dx.$$

Entonces C_c es un espacio vectorial normado (ver sec. II.5) (y en particular, es un espacio métrico). Todos los espacios métricos poseen *completitud* (II.5), sea por lo tanto L^1

[9] *Funciones con soporte compacto* en X son aquellas cuyo soporte es un subconjunto compacto de X. El *soporte* de una función a valores reales f definida en un conjunto X, se define como el subconjunto de X en el cual f no es cero. La situación mas común ocurre cuando X es un espacio topológico (tal como la recta real) y f es una función continua. En ese caso, el soporte de f se define como el menor subconjunto cerrado de X fuera del cual f es cero. El soporte topológico es la clausura del conjunto soporte teórico.
En teoría de probabilidad, el soporte de una distribución de probabilidad puede pensarse como la clausura del conjunto de posibles valores de una variable aleatoria que posea dicha distribución. Existen algunas sutilezas cuando se trabaja con distribuciones continuas.
Se dice que una función tiene soporte compacto si el conjunto donde no es nula conforma un conjunto cerrado y acotado. Por ejemplo, si se tiene una función $f(x)$ cualquiera, se define el soporte de ésta como sigue:

$$supp\ f = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}.$$

Si el supremo de f es un conjunto cerrado y acotado, entonces es compacto.

la completitud de C_c. Este espacio es isomorfo con el espacio de Lebesgue de las funciones integrables (conjuntos módulo de medida cero). Más aún, la integral de Riemann $\int .dx$ define un funcional continuo en C_c que es denso en L^1, por lo tanto $\int .dx$ posee una única extensión a todo L^1. Dicha integral es precisamente, la integral de Lebesgue.

El problema con este enfoque es que las funciones integrables están representadas como elementos de una completitud abstracta y no es trivial mostrar como esos elementos están definidos. En particular, es difícil demostrar la relación entre los límites puntuales de sucesiones de funciones y la integral.

Otro enfoque lo ofrece la integral de Daniell o la variante propuesta por Bourbaki, frecuentemente denominada como el enfoque a la integración de la medida de Radon.

Bibliografía

[1] R.M. Dudley. *Real Analysis and Probability.* Wadsworth & Brookes/Cole, 1989.

[2] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley & Sons, 1999.

[3] Paul Halmos. *Measure Theory.* D. van Nostrand Company, Inc., 1950. Un clásico.

[4] D. Hong, J. Wang and R. Gardner *Real analysis with an introduction to wavelets and applications* Elsevier A.P., 2005. 31

[5] Lebesgue. *Bulletin de la societé mathematique de France*, 35:212, 1907. 29

[6] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 3rd edition, 1976. 33

[7] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 3rd edition, 1986. 33

[8] Walter Rudin. *Functional Analysis.* McGraw Hill, 1991. 33

[9] Wikipedia, October 2006. `http://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_integral`. 33

Capítulo IV

Señales analíticas y frecuencia instantánea

Cuando queremos describir una señal simultáneamente en tiempo y en frecuencia, la localización más natural deseable es la que daría sentido a un contenido espectral *instantáneo*. Existe una cierta contradicción entre estos dos términos, dado que una frecuencia en el sentido de Fourier está matemáticamente ligada a un comportamiento global. Sin embargo, desde el punto de vista biológico, sabemos que dicha localización también posee un sentido físico. Es necesario definir una "frecuencia" en este nuevo contexto, diferente de la frecuencia en el sentido de Fourier.

IV.1. Frecuencia Instantánea

A los efectos de definir una *frecuencia instantánea* es útil apoyarse en el prototipo de señal asociado a la idea de régimen permanente y de estabilidad a lo largo del tiempo: la onda monocromática [1]. Esta se escribe de una única forma (a excepción de una fase pura) como:

$$s(t) = a\,cos(2\pi\nu_0 t),$$

expresión en la cual las constantes a y ν_0 se interpretan como la amplitud y la frecuencia. Esta última mide la rapidez de la evolución del argumento en la función coseno: es su derivada temporal (salvo el factor $1/2\pi$).

Se puede pensar en extender este punto de vista a situaciones evolutivas en las cuales la constante a también dependa del tiempo y introducir en el coseno un argumento cuya derivada sea también función del tiempo, re-escribiendo la anterior de modo mas general, como:

$$s(t) = a(t)\,cos(\phi(t)).$$

Sin embargo, una notación de este tipo no es única, y a la inversa del caso de la onda monocromática ideal, existe una infinidad de pares ordenados $(a(t), \phi(t))$ para representar una misma señal dada $s(t)$. En efecto, basta tomar una función arbitraria $b(t)$, tal que $0 < b(t) < 1$ y re-escribir:

$$s(t) = a(t)\,cos(\phi(t)) = \frac{a(t)}{b(t)}\,b(t)\,cos(\phi(t)),$$

siendo entonces

$$s(t) = a'(t)\, cos(\phi'(t)),$$

con $a'(t) = a(t)/b(t)$ y $\phi'(t) = arcos(b(t)\, cos(\phi(t)))$.

Una forma de solucionar este problema es reconsiderar la onda monocromática antes de generalizar. Una onda monocromática real puede ser vista como la parte real de una exponencial compleja:

$$a\, cos(2\pi\nu_0 t) = \Re e\{a\, exp[i2\pi\nu_0 t]\}.$$

La amplitud y la frecuencia de la señal monocromática son ahora respectivamente el módulo y (salvo un factor constante $1/2\pi$) la derivada de la fase de esta exponencial. Su parte imaginaria, que vale $a\, sin(2\pi\nu_0 t)$, se deduce de la parte real por un desfasaje de $\pi/2$: se dice que las partes real e imaginaria están en *cuadratura*. La operación matemática que permite tal transformación es la que, en frecuencia, permite pasar de la transformada de Fourier de un coseno

$$\frac{1}{2}[\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

a la del seno correspondiente:

$$\frac{1}{2i}[\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

Se trata entonces de un filtrado lineal de ganancia compleja $-i\, sign(\nu)$ (y por lo tanto de respuesta impulsiva $vp(1/\pi t)$, donde vp indica el valor principal en el sentido de Cauchy), denominado la *Transformada de Hilbert*. En consecuencia, a una señal real $s(t)$ se le puede asociar una señal compleja

$$z_s(t) \equiv s(t) + i\mathcal{H}\{s(t)\} = s(t) + \frac{i}{2\pi}(\mathrm{VP}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(u)}{t-u} du, \tag{IV.1}$$

donde con $\mathcal{H}$ se indica la transformada de Hilbert, se tiene una manera equivalente (y única) un par "módulo-fase" a partir del cual es posible definir (con referencia al caso monocromático y de manera también única) una *amplitud instantánea* $a_s(t)$ y una *frecuencia instantánea* $\nu_s(t)$, como:

$$a_s(t) \equiv |z_s(t)|; \tag{IV.2}$$

$$\nu_s(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}[\arg(z_s(t))]. \tag{IV.3}$$

La señal compleja $z_s(t)$ (IV.1) se denomina *señal analítica*. En su representación polar, la señal analítica es representada por un vector que gira cuyo módulo y rapidez de rotación pueden variar con el tiempo, por oposición al caso monocromático para el cual la trayectoria es una circunferencia recorrida a velocidad constante (ver fig. IV.1).

La señal analítica admite una interpretación frecuencial simple, dado que, por definición,

$$Z_s(\omega) = S(\omega)\, +\, i\,(-i\, sign(\omega))\, S(\omega) = 2\, U(\omega)\, S(\omega), \tag{IV.4}$$

donde con $U(\omega)$ indicamos la función escalón unitario de Heaviside, y con S y Z_s las transformadas de Fourier correspondientes a s y z_s respectivamente. Esta ecuación muestra que

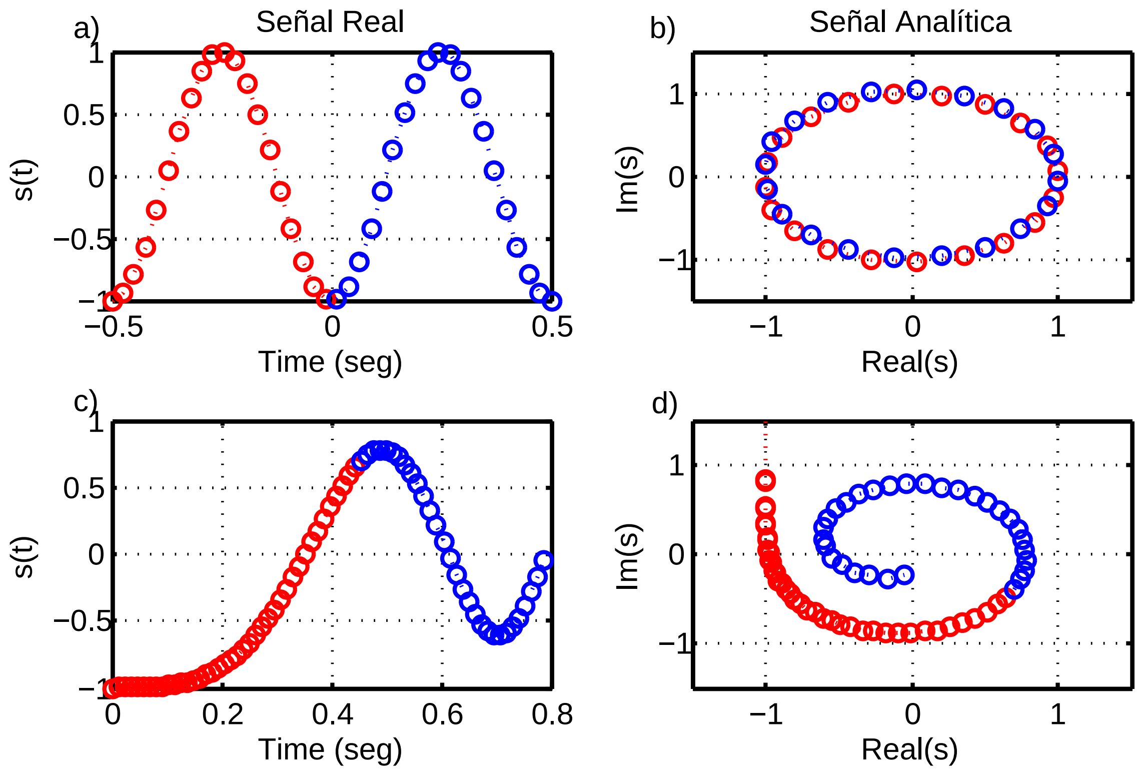

Figura IV.1: Representación de una señal real y de su correspondiente señal analítica. a) Onda sinusoidal con amplitud y frecuencia constante. b) Señal analítica correspondiente a la mostrada en (a) en coordenadas polares. (c) Onda sinusoidal con amplitud modulada y frecuencia variable con el tiempo. (d) Señal analítica correspondiente a la mostrada en (c) en coordenadas polares.

una señal analítica se obtiene a partir de una señal real, forzando a ser cero los valores de su espectro para las frecuencias negativas, lo que no altera en modo alguno el contenido de información, porque para una señal real, $S(-\omega) = \bar{S}(\omega)$.

El truncamiento de las frecuencias negativas tiene como único objetivo "complejizar" la señal inicial. Esto puede verse como una forma de redistribuir la redundancia: dividir por dos la banda espectral ocupada permite en efecto muestrear en tiempo a una cadencia dos veces menos elevada. Para una duración fija, la señal analítica necesita de este modo, un número de muestras dos veces menor que la señal real, pero, a cada uno de los instantes de muestreo se le asocian dos valores correspondientes respectivamente a la parte real y a la parte imaginaria de la señal analítica asociada. La "dimensión" total de la señal, real o analítica, se mantiene entonces globalmente la misma [1; 2].

IV.2. Observación

Debe notarse que las nociones de amplitud y de frecuencia instantáneas, tales como han sido definidas por las ecuaciones (IV.2) y (IV.3) son nociones *locales* en el tiempo, pero son obtenidas por medio de un conocimiento global de la señal, dado que se basan en la utilización de un filtro de Hilbert, que es a respuesta impulsiva infinita.

Apéndice: La Transformada de Hilbert

En procesamiento de señales, una señal analítica o una representación analítica de una señal a valores reales $s(t)$ se define como:

$$s_a(t) = s(t) + i\,\mathcal{H}\{s(t)\},$$

donde $\mathcal{H}\{s(t)\}$ es la transformada de Hilbert de $s(t)$.

Definición .1 *Transformada de Hilbert Dada una señal o función continua a valores reales $s(t)$, se define su* **transformada de Hilbert** *como el producto de convolución:*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{s(t)\} = s^H(t) &= (h * s)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau \ , \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau}d\tau \end{aligned} \tag{5}$$

donde $h(t) = 1/(\pi\, t)$ y, considerando la integral como el valor principal de Cauchy.

Se puede demostrar que si $s(t)$ es una función de $\mathcal{L}^p$, entonces su transformada también está en el mismo espacio si $1 < p < +\infty$.

La respuesta en frecuencia de la transformada de Hilbert es:

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h\}(\omega) = -i\ sgn(\omega),$$

donde $sgn(\omega)$ es la *función signo*, que vale 1 si $\omega > 0$, cero si $\omega = 0$ y -1 si $\omega < 0$.

Como $\widehat{s^H}(\omega) = H(\omega).\hat{s}(\omega)$, se aprecia que el efecto de la transformada de Hilbert es correr $\pi/2$ radianes las componentes de frecuencia negativa de $s(t)$ y en $-\pi/2$ las componentes de frecuencias positivas.

Bibliografía

[1] P. Flandrin. *Temps-Fréquence*. Hermčs, París, 1993-1998.

[2] P. Flandrin. *Time-Frequency/Time-scale Analysis (Wavelet Analysis and Its Applications)*. Academic Press, UK, 1998.