Curso de Posgrado
Análisis y Procesamiento Avanzado de Señales

Guía de Trabajos Prácticos N° 1
Revisión de conceptos básicos

Curso acreditable en:
Doctorado en Ingeniería, UNL
Maestría en Ingeniería Biomédica, UNER

Abril de 2009

Objetivos

Esta guía de trabajos prácticos tiene dos objetivos básicos:

1. Afianzar los conceptos teóricos presentados en clase.
2. Realizar una revisión de conceptos básicos, a nivel de grado, de sistemas y señales.

A los efectos del primer punto, se propone una selección mínima de ejercicios teóricos. Para el segundo punto, se requerirán conocimientos de los siguientes temas:

- Propiedades básicas de los sistemas: linealidad, invarianza, estabilidad, causalidad, etc.
- Respuesta el impulso, respuesta en frecuencia y función de transferencia.
- Convolución lineal y circular.
- Series y transformada de Fourier, propiedades, teorema de convolución, transformada discreta de Fourier (TDF).
- Teorema de muestreo y fenómeno de alias en tiempo y en frecuencia. Decimación e interpolación.
- Resolución en tiempo y en frecuencia, principio de incertidumbre.
- Análisis tiempo–frecuencia mediante la TDF por ventanas.

- Principio de incertidumbre y el teorema de muestreo desde la perspectiva del análisis tiempo–frecuencia.

Presente los desarrollos en forma manuscrita, prolija y con letra **clara** y **legible**. No se aceptará en formato electrónico la parte teórica o conceptual de los trabajos. La parte informática deberá ser presentada en una archivo comprimido `TP1NombreAlumno.zip` o `TP1NombreAlumno.rar`, con el desarrollo en un archivo `TP1NombreAlumno.pdf` y un directorio con los correspondientes archivos `[filename.m]` y la salidas obtenidas, si correspondiera.

Problemas

Fecha: 24 de Abril, 2009.

En esta sección se presenta una serie de problemas que complementan el estudio del capítulo 2 de libro "A Wavelet Tour of Signal Processing" (S. Mallat) y las notas de las clases 2 y 3. Estos guiarán el repaso de conocimientos de matemática avanzada y de grado de ingeniería necesarios para éste y los siguientes capítulos.

Se solicita detallar, paso a paso, la deducción de algunas ecuaciones que forman parte del desarrollo teórico y justificar sus pasos. Se recomienda resolver un listado de los problemas que se encuentran al final de cada capítulo.

Lectura independiente: Se recomienda completar la lectura de las secciones del Capítulo II no vistas en clase.

Capítulo 1: Elementos de matemática avanzada. $\rightarrow$

Demuestre los siguientes enunciados.

1. Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_k\}$ una sucesión convergente de elementos de X. Entonces $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy.

2. Sea (X, d) un espacio métrico, con $X = (0, 2) \cap \mathbb{R}$. Entonces, la sucesión $\{\frac{1}{k}\}$ es de Cauchy pero no es convergente en X. Esto demuestra que no toda sucesión de Cauchy es convergente.

3. Si X es un conjunto y (M, d) es un espacio métrico, entonces el conjunto de todas las funciones acotadas $f : X \rightarrow M$ (i.e. aquellas funciones cuya imagen es un subconjunto acotado de M) puede ser convertido en un espacio métrico definiendo $\tilde{d}(f, g) = sup_{x\in X} \{d(f(x), g(x))\}$ para dos funciones acotadas cualesquiera f y g. Además, si M es completo, entonces este espacio también es completo.

4. Sean H_i (con $i = 1, 2$) espacios de Hilbert, $L : H_1 \rightarrow H_2$ un operador lineal y sea la norma supremo de L definida como:
$$||L||_{sup} = \sup_{f\in H_1} \frac{||L[f]||}{||f||}.$$
Entonces, si la norma de L está acotada, el operador es continuo.

Capítulo 2: $\rightarrow$

- Complete todos los detalles de la demostración de los siguientes puntos:
  1. Teorema 2.1 (pag. 23)
  2. Teorema 2.2 (pag 24)
  3. Teorema 2.3 (pag 26)
  4. Extensión a L^2 por densidad de la definición de la transformada de Fourier.
- Resolver los siguientes problemas de la sección 2.5 de Mallat (pag. 40): 2.1 a 2.5, 2.7 y 2.10. **Ejercicios obligatorios**: 2.1, 2.5 y 2.10.

Ejercicios

Los ítems marcados con $^{(+)}$ son optativos, para los que no tengan una buena base de señales y sistemas discretos. Los demás son de presentación obligatoria.

Ejercicio 1: $^{(+)}$ Para cada uno de los siguientes sistemas determine si son causales, lineales, invariantes en el tiempo y si poseen memoria. En cada caso grafique la salida del sistema $y[n]$ para una entrada dada.

1. $y[n] = g[n]x[n]$ donde $g[n] = A\sin(\omega nT)$ siendo A constante, $\omega = 2\pi f$ y T el período de muestreo.
2. $y[n] = \sum_{k=n_o}^{n} x[k]$
3. $y[n] = \sum_{k=n-n_o}^{n+n_o} x[k]$
4. $y[n] = x[n - n_o]$
5. $y[n] = e^{x[n]}$
6. $y[n] = x[n] + 2$
7. $y[n] = nx[n]$

Ejercicio 2: Considere un sistema representado por la ecuación en diferencias $y[n]-ay[n-1] = x[n]$ y con condición inicial $y[0] = 1$. Responda y justifique:

- ¿Es el sistema invariante en el tiempo?
- ¿Es el sistema lineal?
- Suponga que la condición inicial cambia a $y[0] = 0$, ¿modifica esto las respuestas de los puntos anteriores?

Ejercicio 3: Los sistemas LTI poseen dos interesantes propiedades:

- la salida es cero cuando la entrada es cero (y el sistema está inicialmente en reposo)

- no agregan componentes armónicas al espectro de frecuencias de la señal de entrada.

Proponga dos sistemas, uno lineal y otro no lineal, y verifique estas propiedades.

Ejercicio 4: $^{(+)}$ Encuentre la respuesta al impulso de los sistemas LTI causales descriptos por las siguientes ecuaciones en diferencias y clasifíquelos en función de ésta (FIR/IIR).

1. $y[n] - y[n-2] = x[n]$
2. $y[n] = x[n] + 0{,}5x[n-1]$
3. $y[n] - y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]$
4. $y[n] - 0{,}5y[n-1] + 0{,}25y[n-2] = x[n]$
5. $y[n] = x[n] + x[n-1] - y[n-1]$

Ejercicio 5: $^{(+)}$ Determine la función de transferencia de los siguientes sistemas LTI causales :

1. $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$
2. $y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$
3. $y[n] = 7x[n] + 2y[n-1] - 6y[n-2]$
4. $y[n] = \sum_{k=0}^{7} 2^{-k}x[n-k]$

Ejercicio 6: Considere el sistema $H(z) = \frac{1-2z^{-1}+2z^{-2}-z^{-3}}{(1-z^{-1})(1-0{,}5z^{-1})(1-0{,}2z^{-1})}$

1. Dibuje el diagrama de polos y ceros. ¿Es estable el sistema?
2. Determine la respuesta al impulso del sistema.

Ejercicio 7: $^{(+)}$ Realice las tres operaciones siguientes y comente los resultados.

1. multiplique 121 por 311.
2. multiplique los polinomios $1 + 2x + x^2$ y $3 + x + x^2$
3. calcule la convolución de las señales $[1, 2, 1]$ y $[3, 1, 1]$.

Ejercicio 8: Realice su propia implementación de las convoluciones lineal y circular mediante la utilización de ciclo `for`. Compare los resultados con la función `conv`.

Ejercicio 9: Dado el sistema $6y[n]-4y[n-1]+5y[n-2] = x[n]-2x[n-1]+x[n-2]$, inicialmente en reposo, obtenga la respuesta al escalón unitario mediante la ecuación en diferencias y luego compárela con la calculada mediante la sumatoria de convolución, para lo que deberá encontrar previamente su respuesta al impulso.

Ejercicio 10: $^{(+)}$ Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ y muestre que cuando la entrada $x[n]$ es una secuencia periódica con período N, la salida $y[n]$ también es periódica con el mismo período.

Ejercicio 11: Defina tres señales cualquiera y muestre numéricamente las siguientes propiedades de la convolución:

1. conmutativa: $\mathbf{y} * \mathbf{x} = \mathbf{x} * \mathbf{y}$
2. asociativa: $\mathbf{x} * (\mathbf{y} * \mathbf{w}) = (\mathbf{x} * \mathbf{y}) * \mathbf{w}$
3. distributiva con respecto a la suma: $\mathbf{x} * (\mathbf{y} + \mathbf{w}) = \mathbf{x} * \mathbf{y} + \mathbf{x} * \mathbf{w}$

Ejercicio 12: Discretice una señal senoidal con frecuencia 5 Hz. y duración 1 seg. Utilice las siguientes frecuencias de muestreo: 1000, 100, 25, 10, 4, 1 y 0,5 Hz. Grafique y analice el resultado en cada uno de los casos.

Ejercicio 13: Discretice una señal senoidal con frecuencia 4000 Hz. y duración 2 seg., utilizando una frecuencia de muestreo de 129 Hz. Grafique el resultado y estime la frecuencia de la onda sinusoidal que se observa en la figura. Analice y obtenga conclusiones.

Ejercicio 14: $^{(+)}$ Discretice una señal arbitraria con frecuencia de muestreo de 10 Hz y sobremuestreela mediante distintos tipos de interpoladores a 4 veces la frecuencia de muestreo.

Ejercicio 15: Aproxime una onda cuadrada mediante series seno de diferente cantidad de términos y discuta la relación entre los resultados obtenidos y el fenómeno de Gibbs.

Ejercicio 16: Genere una señal $s(t) = sin(2\pi f_1 t) + 4sin(2\pi f_2 t)$, con $f_1 = 10$ y $f_2 = 20$ Hz, y obtenga su versión discreta $s[n]$ con período de muestreo $T_m = 0{,}001$ seg. en el intervalo de tiempo $t = [0 \ldots 1)$ seg. A continuación:

1. Calcule la TDF $S[k]$ de la señal $s[n]$ y grafique el espectro de magnitud de $S[k]$.
2. Verifique la relación de Parseval para la TDF:

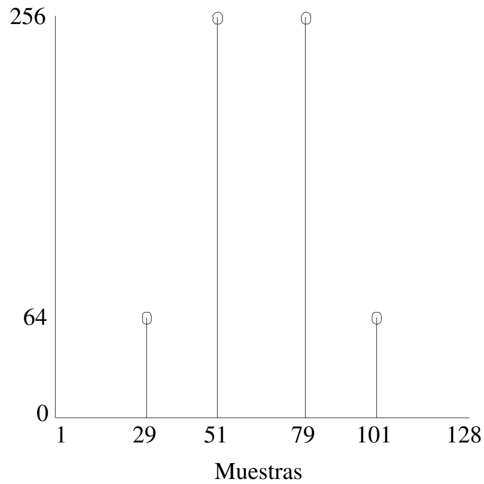
$$E_s = \sum_{n=1}^{N} s[n]^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} |S[k]|^2$$

donde N es la cantidad de muestras de $s[n]$.

Realice los siguiente cambios y analice los cambios obtenidos en $S[k]$:

1. Modifique $s[n]$ de forma tal que: $s(t) = sin(2\pi f_1 t) + 4sin(2\pi f_2 t) + 4$.
2. Modifique las frecuencias de las señales seno de forma tal que $f_1 = 10$ Hz y $f_2 = 11$ Hz.
3. Modifique nuevamente las frecuencias de las señales seno de forma tal que $f_1 = 10$ Hz y $f_2 = 10{,}5$ Hz.
4. Modifique el intervalo de tiempo de análisis de la siguiente manera $t = [0 \ldots 0{,}72)$s.

Ejercicio 17: En la siguiente figura se observa el espectro de magnitud obtenido aplicando la TDF a una señal generada mediante la función $g(t) = \sin(2\pi f_1 t) + 4\sin(2\pi f_2 t)$ y luego digitalizada.



Siendo T la duración total de la señal adquirida y f_m la frecuencia de muestreo, indique cuáles de los siguientes conjuntos de parámetros puede ser correcto:

1. $T = 249$ ms, $f_m = 512$, $f_1 = 112$, $f_2 = 200$ Hz.
2. $T = 498$ ms, $f_m = 128$, $f_1 = 56$, $f_2 = 200$ Hz.
3. $T = 993$ ms, $f_m = 128$, $f_1 = 100$, $f_2 = 50$ Hz.
4. $T = 498$ ms, $f_m = 256$, $f_1 = 56$, $f_2 = 868$ Hz.
5. $T = 993$ ms, $f_m = 128$, $f_1 = 100$, $f_2 = 78$ Hz.
6. $T = 124{,}5$ ms, $f_m = 1024$, $f_1 = 3872$, $f_2 = 5520$ Hz.

Ejercicio 18: Verifique las condiciones de aplicabilidad para la propiedad:

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{x}\}\mathcal{F}\{\mathbf{y}\}\}$$

utilizando señales de N muestras y comparando los resultados de la convolución calculada mediante:

1. la sumatoria de convolución con ciclos `for`,
2. la función `conv`,
3. la función `filter`,
4. las funciones `fft` y `ifft` utilizadas directamente como lo indica la propiedad,
5. las funciones `fft` e `ifft` pero agregando $N - 1$ ceros tanto a $\mathbf{x}$ como a $\mathbf{y}$.

Ejercicio 19: Realice un función para el cálculo y graficación de un espectrograma a partir de ciclos `for` y la transformada rápida de Fourier (`fft`). Utilice diferentes solapamientos y anchos de ventana para el análisis. Analice y discuta los resultados a la luz del principio de incertidumbre de Heisenberg.

Ejercicio 20: Analice una señal senoidal cuya frecuencia crece linealmente desde cero hasta 8 veces la frecuencia de muestreo mediante la función anterior. Analice los resultados explicando claramente el fenómeno observado.

Ejercicio 21: Realice el espectrograma de una señal senoidal cuya frecuencia crezca linealmente entre 100 y 200 Hz. Grafique el resultado con las escalas de tiempo y frecuencia adecuadas. Analice y discuta el resultado obtenido.