ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO AVANZADO DE SEÑALES

Clase 3 – Parte 2

Dra. María Eugenia Torres
Dr. Hugo Leonardo Rufiner
Dr. Diego H. Milone

Universidad Nacional de Entre Ríos
Facultad de Ingeniería
Laboratorio de Señales y
Dinámicas no Lineales

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ciencias Hídricas
SINC(i)

Norma

(V,+,*) un espacio vectorial sobre F de C.

Se denomina **seminorma** en V a

$$\rho : V \to \Re \; / \quad \begin{array}{l} i) \quad \rho(v) \geq 0 \quad \forall \mathrm{v} \in \mathrm{V} \\ ii) \quad \rho(av) = |a|\rho(v) \quad \forall a \in \Re, \forall \mathrm{v} \in \mathrm{V} \\ iii) \quad \rho(u+v) \leq \rho(u) + \rho(v) \end{array}$$

Una **norma** es una seminorma con la condición adicional que:

$$\rho(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Espacio normado

(V,+,*, ||.||) un espacio vectorial normado sobre F de C.

En toda seminorma:

$$\rho(u \pm v) \geq \left| \rho(u) - \rho(v) \right|$$

Espacios de Banach

EB son espacios vectoriales normados completos

i.e. toda sucesión de Cauchy es convergente en el espacio.

$$\{x_n\} / \text{Dado } \varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon \in N /$$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon .$$

Sistemas Lineales y Filtros

- Filtros lineales invariantes en el tiempo
- Integrales de Fourier en L^1 y en L^2.
  - Propiedades.
- Discretización
- Filtros lineales discretos invariantes en el tiempo.
- Señales finitas.

de Fourier.

Informe de Fourier al *Institute de France* (1807)

f periódica puede representarse por serie de ondas senoidales armónicas.

Impacto: física, ingeniería, análisis matemático.

Motivación de Fourier: difusión del calor

Transformada de Fourier diagonaliza todo operador lineal invariante en el tiempo

⇩

Bloques fundamentales del procesamiento de señales

Filtrado Lineal Invariante en el tiempo.

Operaciones básicas del procesamiento de señales

- transmisión de señales
- remoción de ruido estacionario
- codificación predictiva

son implementadas con operadores lineales invariantes en el tiempo

Filtrado Lineal Invariante en el tiempo.

Operador lineal invariante en el tiempo

$$f \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow g$$

$$f_\tau(t) = f(t-\tau)$$

$$g(t) = L[f(t)] \quad \Rightarrow \quad g(t-\tau) = L[f_\tau]$$

Por estabilidad numérica L debe tener una forma de continuidad débil.

Esta “continuidad débil” se formaliza mediante la “teoría de distribuciones”.

Delta de Dirac

- δ tiene soporte en { *t = 0*} *y* $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$
- *Si f continua:* $$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\delta_0(u)\,du$$
- *Se define para g continua tal que* $$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1$$

$$g_s(t) = \frac{1}{s} g\left(\frac{t}{s}\right)$$

$$\boxed{\delta = \lim_{s\to 0} g_s}$$

$$\lim_{s\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} g_s(t)\, f(t)dt = \boxed{f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, f(t)dt}$$

Convergencia débil

Es Notación!!!

Sistema Lineal Invariante en el tiempo (SLIT).

Se caracterizan por su respuesta al impulso unitario.

$$\boxed{\delta_u(t) = \delta(t-u)}$$

f *continua*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\delta_u(t)\,du$$

L lineal y continua

$$f \longrightarrow \boxed{\;L\;} \longrightarrow L[f]$$

$$L[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,L[\delta_t(u)]\,du$$

h *respuesta al impulso*

$$L[f(t)] = h * f(t)$$

$$\delta \longrightarrow \boxed{\;L\;} \longrightarrow h$$

donde $h(t) = L[\delta(t)]$

Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT).
Propiedades del producto de convolución

Conmutativa

$$f * h(t) = h * f(t)$$

Diferenciación

$$\frac{d}{dt}(f * h(t)) = \frac{df}{dt} * h(t) + f * \frac{dh}{dt}(t)$$

Convolución con la Dirac

$$f * \delta_\tau(t) = f(t - \tau)$$

Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT).
Estabilidad y Causalidad

Filtro causal

Si L[f(t)] no depende de los valores de f(u) para u>t

$$L[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, f(t-u)\, du$$

$$\Downarrow$$

$$h(u) = 0 \qquad \text{si } u<0$$

La respuesta impulsiva h se denomina ***causal***

Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT). Propiedad de estabilidad

Estabilidad garantiza que L[f(t)] esta acotada si f(t) es acotada

$$|L[f(t)]| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)|\,|f(t-u)|\,du \leq \sup_{u\in\Re} |f(u)| \int_{\Re} |h(u)|\,du$$

$$\Downarrow$$

Es suficiente que $\displaystyle\int_{\Re} |h(u)|\,du < +\infty$

Se dice que h es ***estable*** *si es integrable*

Se demuestra que esta condición es también necesaria si h es una función.

Sistema Lineal Invariante en el tiempo (SLIT)
Ejemplos

Sistema Amplificación-Retardo

$$L[f(t)] = \lambda\, f(t-\tau)$$

Respuesta al impulso:

$$h(t) = \lambda\, \delta(t-\tau) = \lambda\, \delta_\tau(t)$$

Promediador Uniforme de *f* sobre intervalos de long. *T*

$$L[f(t)] = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} f(u)\, du$$

Respuesta al impulso:

$$h(t) = \frac{1}{T}\,\chi_{[-T/2,\,T/2]}(t)$$

Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT).
Autovalores y autovectores

Las exponenciales complejas $e^{i\omega t}$

*son **autovectores** del operador de convolución*

$$L[e^{i\omega t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, e^{i\omega (t-u)} du$$

$$L[e^{i\omega t}] = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, e^{-i\omega u} du = \hat{h}(\omega).e^{i\omega t}$$

donde $\hat{h}(\omega) = \int_{\Re} h(u)\, e^{-i\omega u} du$ *(Transformada de Fourier)*

*es el **autovalor** asociado en la frecuencia* ω

Operador Lineal

$$L : H_1 \to H_2, \text{ con } H_i \text{ espacios de Hilbert}$$

$$L \text{ es lineal} \Leftrightarrow \forall \lambda_1, \lambda_2 \in C, \forall f_1, f_2 \in H$$

$$L\left(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\right) = \lambda_1 L\left(f_1\right) + \lambda_2 L\left(f_2\right)$$

- Operador adjunto
- Operador autoadjunto
- Autovector y autovalor
- Diagonalización de operadores

Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT).
Autovalores y autovectores

Como las ondas sinusoidales $e^{i\omega t}$

*son **autovectores** de los SLIT*

es tentador tratar de descomponer cualquier función f como "suma" de estos autovectores.

Podemos expresar L[f] directamente a partir de los autovalores $\hat{h}(\omega)$.

El análisis de Fourier demuestra que bajo condiciones débiles (seccional continuidad) es posible escribir L[f]

como una Integral de Fourier.

Integrales de Fourier en L^1 y en L^2

$$f \in L^1(\Re) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) \right| dt < +\infty$$

$$f \in L^2(\Re) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) \right|^2 dt < +\infty$$

Energía finita

L a Transformada de Fourier en $L^1(R)$

$$f \in L^1(\Re)$$

La Transformada de Fourier (FT) $$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

mide “cuantas” oscilaciones de f hay en la frecuencia ω.

Si $f(t) \in L^1(\Re)$: $$\left|\hat{f}(\omega)\right| \leq \int \left|f(t)\right| dt < +\infty$$

$\hat{f}(\omega) \in L^1(\Re)$ y es continua

(Papoullis, 1987)

La Transformada de Fourier en $L^1(R)$

Teorema (Transformada Inversa de Fourier)

Si $f(t) \in L^1(\Re)$ y $\boxed{\hat{f}(\omega) \in L^1(\Re)}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

La reconstruccion no está garantizada para funciones discontinuas

Teorema (de Convolución)

Sea $f(t) \in L^1(\Re)$ y $h(t) \in L^1(\Re)$

$$g(t) = f * h(t) \quad \in L^1(\Re)$$

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\, \hat{h}(\omega)$$

La Transformada de Fourier en $L^1(R)$

La respuesta de un SLIT puede calcularse por su FT

$$L[f] = g = f * h \quad y \quad \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega).\hat{h}(\omega) \quad \Rightarrow$$

$$L[f] = g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Re} \hat{f}(\omega)\ \hat{h}(\omega)\ e^{i\omega t}\ d\omega$$

$$L[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Re} \hat{h}(\omega) \boxed{[\hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}]}\, d\omega$$

$\hat{h}(\omega)$ atenua o amplifica cada componente frecuencial $e^{i\omega t}$ de amplitud $\hat{f}(\omega)$

Esta convolución se denomina **Filtrado Frecuencial** y $\hat{h}(\omega)$ es la **Función de Transferencia del Filtro**

La Transformada de Fourier en $L^1(R)$

Propiedad	Función	Transf. de Fourier
	$f(t)$	$\hat{f}(t)$
Inversa	$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Convolución	$f_1 * f_2(t)$	$\hat{f}_1(\omega).\ \hat{f}_2(\omega)$
Multiplicación	$f_1 . f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\hat{f}_1 * \hat{f}_2(\omega)$
Traslación Temporal	$f(t-u)$	$e^{-i\omega u}\hat{f}(\omega)$
Modulación	$e^{i\xi t} f(t)$	$\hat{f}(\omega-\xi)$
Scaling	$f\left(\frac{t}{s}\right)$	$\lvert s\rvert\,\hat{f}(s\omega)$
Derivada Temporal	$f^{(p)}(t)$	$(i\omega)^p\hat{f}(\omega)$
Derivada Frecuencial	$(-it)^p f(t)$	$\hat{f}^{(p)}(\omega)$
Conjugada Compleja	$\overline{f}(t)$	$\overline{\hat{f}}(-\omega)$
Simetría Hermitiana	$f(t)\in\Re$	$\hat{f}(-\omega)=\overline{\hat{f}}(\omega)$

La Transformada de Fourier en $L^2(R)$

$$f(t) = \chi_{[-1,1]}(t)$$

Función Característica de [-1,1]

o "Indicator Function"

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\,dt = \frac{2\,sin\omega}{\omega} \qquad \notin L^1(\Re)$$

$$\hat{f}(\omega) \quad \begin{cases} \notin L^1(\Re) \\ \in L^2(\Re) \end{cases}$$

No puede aplicarse el Teorema de Inversión !

Es necesario extender la Transformada de Fourier a L^2 (**R**)

L^2 es Hilbert

- Producto interno

$$< f, g >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{g}(t)\,dt, \text{ para } f, g \in L^2(\Re)$$

- Norma

$$\|f\|^2 =< f, f >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{f}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt, \text{ para } f \in L^2(\Re)$$

La Transformada de Fourier en $L^2(R)$

Teorema:

Si $\quad f \ y \ h \in L^1(\Re) \cap L^2(\Re)$ entonces

$$\begin{aligned} < f, h > &= \int_{\Re} f(t)\,\overline{h}(t)\,dt \\ &= \int_{\Re} \hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{h}}(\omega)\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} < \hat{f}, \hat{h} > \end{aligned}$$

$$\boxed{< f, h >= \frac{1}{2\pi} < \hat{f}, \hat{h} >}$$

Fórmula de Parseval

$$\boxed{\text{Si } \ f = g, \quad \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\left\|\hat{f}\right\|_2^2}$$

Fórmula de Plancherel

La Transformada de Fourier en $L^2(R)$

Extensión a L^2 ⇨ **por densidad**

Si $f \in L^2(\Re)$ pero $f \notin L^1(\Re)$

no puede calcularse su Transformada de Fourier mediante la integral usual

porque

$$f(t)\, e^{i\omega t} \notin L^1(\Re)$$

Entonces se la define como un límite usando la **densidad** de $L^1(\Re) \cap L^2(\Re)$ en $L^2(\Re)$

La Transformada de Fourier en $L^2(R)$

$$L^1(\Re) \cap L^2(\Re) \quad \text{es denso en} \quad L^2(\Re)$$

$$\exists \quad \{f_n\}_{n\in N}, \quad f_n \in L^1(\Re) \cap L^2(\Re), \text{ tal que } f_n \text{ converge a } f \text{ en } L^2(\Re)$$

$$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Como $\{f_n\}$ es convergente, es una sucesión de Cauchy

$$\Downarrow$$

$$\|f_n - f_p\| < \varepsilon \quad \forall\ n, p > N_\varepsilon$$

$$f_n \in L^1(\Re) \quad \Rightarrow \exists\, \hat{f}_n \quad \text{y} \quad \|f_n - f_p\|_1 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}_n - \hat{f}_p\|_1$$

Entonces $\{\hat{f}_n\}$ es de Cauchy en $L^1 \cap L^2 \subset L^2$

L^2 es un espacio de Hilbert completo $\Rightarrow$ toda sucesión de Cauchy converge en él

$$\exists \quad \hat{f} \in L^2(\Re) \text{ tal que } \quad lim\|\hat{f} - \hat{f}_n\|_2 = 0$$

se la **define** como la Transformada de Fourier de f

La Transformada de Fourier
Ejemplos

- **Función Característica**

$$f(t) = \chi_{[-T,T]}(t) \qquad \hat{f}(\omega) = \int_{-T}^{T} e^{-i\omega t}\, dt = 2\,\frac{sin(T\omega)}{\omega}$$

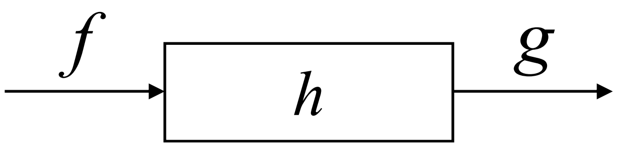
- **Filtro Pasa-Bajo Ideal**

$$\hat{h}(\omega) = \chi_{[-\xi,\xi]}(\omega) \qquad h(t) = \frac{1}{2}\int_{-\xi}^{\xi} e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{sin(\xi t)}{\pi t}$$

La Transformada de Fourier
Ejemplos

Circuito Electrónico Pasivo

Implementa filtros analógicos: resistencias, capacitores e inductores.



$$\sum_{k=0}^{K} a_k f^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k g^{(k)}(t)$$

f(t)=g(t)=0 si *t<0*

$$g(t) = f * h(t)$$

Aplicando Fourier:

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\hat{f}(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{K} a_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^{M} b_k (i\omega)^k}$$

La Transformada de Fourier
Ejemplos

- **Función Gaussiana**

$$f(t) = \exp(-t^2) \qquad \text{es} \quad C^\infty$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-T}^{T} e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt \qquad\qquad 2\hat{f}'(\omega) + \omega\,\hat{f}(\omega) = 0$$

- **Chirp Gaussiano** $\quad f(t) = \exp(-(a-ib)t^2)$

$$\hat{f}(\omega) = \left[\frac{\pi}{a-ib}\right]^{1/2} \exp\left(\frac{-(a+ib)\omega^2}{4(a^2+b^2)}\right)$$

- **Regularidad y Decaimiento**

La *regularidad global* de una señal f depende del decaimiento de $|\hat{f}(\omega)|$ cuando ω aumenta

$$\text{Si } \hat{f}(\omega) \in L^1(\Re) \Rightarrow |f(t)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Re} |\hat{f}(\omega)| d\omega < +\infty$$

i.e f es continua y acotada

La Transformada de Fourier
Propiedades: Regularidad y decaimiento

Teorema:

$$\text{Si} \qquad \int_{\Re} \left| \hat{f}(\omega) \right| \left(1 + \left| \omega \right|^{p}\right) d\omega \quad < +\infty$$

entonces la función *f* es acotada y *p* veces continuamente diferenciable con derivadas acotadas.

La Transformada de Fourier
Propiedades: Regularidad y decaimiento

- Si $\exists n$ constantes K y $\varepsilon > 0 \,/\, \left|\hat{f}(\omega)\right| \leq \dfrac{K}{1+\left|\omega\right|^{p+1+\varepsilon}}$

  Entonces $f \in C^p$

- Si $\hat{f}$ tiene soporte compacto, el teorema implica que $f \in C^\infty$

El decaimiento de $\left|\hat{f}(\omega)\right|$ depende del peor comportamiento singular de f.

La Transformada de Fourier
Propiedades: Regularidad y decaimiento

***Ejemplo**:* $f(t) = \chi_{[-T,T]}(t)$

es discontinua en -T y T.

$$\Downarrow$$

$|\hat{f}(\omega)|$ decae como $1/|\omega|$

¿ Es f regular para $t \neq \pm\ T$?

Esta información no puede obtenerse a partir de la Transformada de Fourier.

Para caracterizar regularidades locales se necesitan formas de onda bien localizadas en el tiempo → → Onditas